

Simulation d'un voyage de la Terre à la Lune

Descriptifs des mises en données

1 - Objectif des simulations

Plusieurs objectifs sont visés par les simulations. On peut les lancer ou les télécharger à partir du site :

www.tuclic.fr/tuto_pdf_06/fusee/

Les simulations montrent le mouvement et la trajectoire de la fusée. 14 mises en données correspondent à des phases successives dans l'élaboration du modèle et à une complexité croissante dans la simulation d'un voyage de la Terre à la Lune avec une fusée. Les mises en données et la résolution des équations du mouvement sont faites dans des pages HTML 5 qui peuvent être exécutées ou téléchargées pour être éditées et modifiées (testées avec Mozilla Firefox).

Les principales phases dans l'élaboration du modèle sont :

1 - Mouvement balistique d'une fusée dans le champ de gravitation de la Terre et de la Lune, sans mode de propulsion de la fusée.

2 - Phase propulsive jusqu'à épuisement du carburant, en choisissant la direction de l'éjection des gaz par rapport à l'axe de la fusée.

3 - Fusée à plusieurs étages propulsifs, qui permettent un alunissage en accélérant ou en freinant la fusée.

Ceci permet de voir l'importance des contraintes liées à la gestion du carburant emporté par la fusée.

2 - Equations résolues

a - Force due à l'attraction gravitationnelle de la Terre :

$$F_1 = \frac{G \times M_{Terre} \times M_{fusée}}{(D_{Terre-fusée})^2}$$

Avec :

$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{kg}^{-2} \cdot \text{m}^2$ Constante de gravitation universelle

$M_{Terre} = 5,972 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	Masse de la Terre
$M_{fusée}$	Masse de la fusée, dépendant de la mise en donnée (masse de la structure des étages + masse du carburant).
$D_{Terre-fusée}$	= distance entre la Terre et la fusée
	$= \sqrt{(x_{Terre} - x_{fusée})^2 + (y_{Terre} - y_{fusée})^2}$ où x et y sont les coordonnées dans un repère orthonormé.

Cette force est dirigée de la fusée vers le centre de la Terre.

b - Force due à l'attraction gravitationnelle de la Lune :

$$F_2 = \frac{G \times M_{Lune} \times M_{fusée}}{(D_{Lune-fusée})^2}$$

Avec :

$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{kg}^{-2} \cdot \text{m}^2$	Constante de gravitation universelle
$M_{Lune} = 7,36 \cdot 10^{22} \text{ kg}$	Masse de la Lune
$M_{fusée}$	Masse de la fusée, dépendant de la mise en donnée (masse de la structure des étages + masse du carburant).
$D_{Lune-fusée}$	= distance entre la Lune et la fusée

$$= \sqrt{(x_{Lune} - x_{fusée})^2 + (y_{Lune} - y_{fusée})^2}$$

où x et y sont les coordonnées dans un repère orthonormé.

Cette force est dirigée de la fusée vers le centre de la Lune.

c - Force propulsive de la fusée :

$$F_{\text{prop}} = \text{Débit massique} \times \text{Vitesse d'éjection des gaz}$$

Le débit massique est de l'ordre de 250 kg.s^{-1} pour Ariane V. Plus il est grand, plus la force propulsive de la fusée est grande, mais plus le carburant est consommé rapidement. Jouer sur le débit massique n'aura pas de conséquence au premier ordre sur la vitesse ou l'altitude atteintes par la fusée. Cela peut malgré tout avoir un impact sur la trajectoire.

La vitesse d'éjection des gaz est de l'ordre de 4200 m.s^{-1} pour Ariane V. Cette vitesse est limitée par la puissance thermique et mécanique générée par la combustion du carburant. On peut, pour les simulations, augmenter la vitesse d'éjection des gaz de façon utopique pour compenser une masse de carburant qui serait trop faible pour accélérer ou freiner la fusée.

L'angle de la direction d'éjection des gaz est ajustable par rapport à la direction du mouvement de la fusée. La vitesse d'éjection des gaz est comptée par rapport à la fusée.

d - Evolution de la masse de la fusée

La masse de la fusée diminue du fait du carburant consommé et des étages largués.

On a :

$$M_{fusée} = M_{structure} + M_{gaz}$$

et l'évolution de la masse de carburant est, à chaque pas de temps de la simulation :

$$M_{gaz} = M_{gaz} - (Débit massique \times Pas de temps)$$

puisque la définition prise ici du débit massique est l'opposé de la dérivée de la masse de carburant présent dans la fusée par rapport au temps.

Les simulations ont été faites avec un pas de temps de 1 seconde. On obtient donc seconde après seconde une estimation de la position de la fusée. Le dessin de la trajectoire est réactualisé tous les $n_calc = 500$ pas de temps, soit toutes les 500 secondes dans la réalité. Une temporisation $time_dess = 10$ ms s'écoule entre deux rafraîchissements du dessin de la trajectoire de la fusée, auxquelles s'ajoutent le temps du calcul pour les 500 pas de temps ainsi que le traitement graphique. La simulation dure donc environ 50000 fois moins longtemps que le voyage réel de la fusée.

Un test est effectué à chaque pas de temps pour voir s'il reste du carburant dans l'étage concerné de la fusée. Lorsque $M_{gaz} = 0$, on annule la force propulsive F_{prop} . La masse de carburant est de l'ordre de 150 tonnes = 150 000 kg, pour une masse de la structure de l'ordre de 10 tonnes = 10 000 kg.

e - Accélération de la fusée :

$$Accélération = \frac{F_1 + F_2 + F_{propulsion}}{M_{fusée}}$$

Cette égalité est projetée sur les axes x et y.

f - Evolution de la vitesse de la fusée

L'accélération est la dérivée de la vitesse par rapport au temps. On a donc à chaque pas de temps de la simulation une évolution de la vitesse :

$$Vitesse = Vitesse + (Accélération \times Pas de temps)$$

Cette égalité est projetée sur les axes x et y.

g - Evolution de la position de la fusée :

$$x_{fusée} = x_{fusée} + (Vitesse_x \times Pas de temps)$$

$$y_{fusée} = y_{fusée} + (Vitesse_y \times Pas de temps)$$

h - Test de rencontre de la fusée avec la Terre :

$$D_{Terre-fusée} \leqslant \text{Rayon de la Terre}$$

i - Test de rencontre avec la Lune :

$$D_{Lune-fusée} \leqslant \text{Rayon de la Lune}$$

j - Accélération radiale et accélération orthoradiale au décollage de la fusée

On a limité à $1,5 \times F1$ la force de propulsion radiale (suivant la direction de la verticale locale de la Terre) pour pouvoir exercer une force de propulsion orthoradiale (mise en mouvement orbital de la fusée). Tant que l'attraction terrestre est très forte, le mouvement de la fusée est vertical. A partir d'une certaine altitude, on incurve la trajectoire en maintenant une force de propulsion radiale qui permet à la fusée de s'éloigner de la Terre. L'expression de la direction (angle gamma dans la mise en donnée) de l'éjection des gaz fait appel à un peu de trigonométrie.

k - Nouvel étage de la fusée mis en action

Un test géométrique ou cinématique (éloignement ou rapprochement de la Terre ou de la Lune, position de la fusée, ...) fait passer à une nouvelle phase du voyage, qui comporte le plus souvent une accélération ou un freinage avec consommation de carburant, suivi d'un mouvement balistique. L'expression de l'accélération de la fusée pour le calcul de l'évolution de sa vitesse est programmée séparément pour chaque phase du voyage, précédée du test correspondant.

3 - Paramètres des mises en données

14 mises en données sont décrites ci-dessous. Elles peuvent être lancées ou téléchargées pour être éditées sur le site tuclic.pagesperso-orange.fr/tuto_pdf_06/fusée/.

fusee_01.htm

Passage très près de la Lune et retour à 180°.

Pas de propulsion.

Pas de test avec le rayon de la Terre ou de la Lune.

Vitesse initiale	Direction initiale	Altitude initiale	Pas de temps	n_calc
430,5	90	2000000	500	20

[fusee_02.htm](#)

Trajectoire complexe. Pas de propulsion.

Dé-zoomer pour voir la totalité de la trajectoire (déplacer le curseur du bas vers la gauche)

Vitesse initiale	Direction initiale	Altitude initiale	Pas de temps	n_calc
11100	90	0	1	1000

[fusee_03.htm](#)

Trajectoire en ∞ .

Vitesse initiale	Direction initiale	Altitude initiale	Pas de temps	n_calc
11050	90	0	1	1000

[fusee_04.htm](#)

Trajectoire quasi elliptique au voisinage de la Terre. Départ arrêté depuis une grande altitude.

Vitesse initiale	Direction initiale	Altitude initiale	Pas de temps	n_calc
0	100	10000000	1	100

Etage 1 propulsif

Débit gaz	vitesse des gaz	masse de gaz (carburant)	masse fusée (structure)	angle d'éjection
100	2300	148300	9700	0

[fusee_05.htm](#)

Décollage vertical à vitesse nulle. Longue phase propulsive avec contrainte de poussée orthoradiale/radiale : trajectoire en spirale.

Vitesse initiale	Direction initiale	Altitude initiale	Pas de temps	n_calc
0	180	3000000	1	10

Etage 1 propulsif

Débit gaz	vitesse des gaz	masse de gaz (carburant)	masse fusée (structure)	angle d'éjection
10	70000	148300	9700	0

fusee_06.htm

Décollage vertical à vitesse nulle. Courte phase propulsive avec contrainte de poussée orthoradiale/radiale suivie d'une trajectoire elliptique balistique. Départ au sol (altitude 25 m car le calcul de la propulsion est fait après le test de contact avec le sol, d'où une légère chute à chaque pas de temps avant de remonter).

Vitesse initiale	Direction initiale	Altitude initiale	Pas de temps	n_calc
0	180	25	1	50

Etage 1 propulsif

Débit gaz	vitesse des gaz	masse de gaz (carburant)	masse fusée (structure)	angle d'éjection
300	5000	148300	9700	0

fusee_07.htm

Décollage vertical du sol à vitesse nulle. Courte phase propulsive avec contrainte de poussée orthoradiale/radiale suivie d'une trajectoire elliptique balistique.

Deuxième étage pour une mise en orbite quasiment circulaire autour de la Terre.

Croix rouge : nouvel étage mis en action. Croix jaune : fin de la phase propulsive (plus de carburant dans cet étage).

Vitesse initiale	Direction initiale	Altitude initiale	Pas de temps	n_calc
0	180	25	1	500

Etage 1 :

Débit gaz	vitesse des gaz	masse de gaz (carburant)	masse fusée (structure)	angle d'éjection
300	5000	148300	9700	0

Etage 2 :

Débit gaz	vitesse des gaz	masse de gaz	masse fusée	angle d'éjection

	gaz	(carburant)	(structure)	
300	500	8700	1000	0

fusee_08.htm

Décollage vertical du sol à vitesse nulle. Courte phase propulsive avec contrainte de poussée orthoradiale/radiale suivie d'une trajectoire elliptique balistique.

Deuxième étage pour une mise en orbite quasiment circulaire autour de la Terre.

Troisième étage lancé après un tour autour de la Terre. Passage au voisinage de la Lune. Trajectoire complexe.

Croix rouge : nouvel étage mis en action. Croix jaune : fin de la phase propulsive (plus de carburant dans cet étage).

Vitesse initiale	Direction initiale	Altitude initiale	Pas de temps	n_calc
0	180	25	1	500

Etage 1 :

Débit gaz	vitesse des gaz	masse de gaz (carburant)	masse fusée (structure)	angle d'éjection
300	5000	148300	9700	0

Etage 2 :

Débit gaz	vitesse des gaz	masse de gaz (carburant)	masse fusée (structure)	angle d'éjection
300	500	8700	1000	0

Etage 3 :

Débit gaz	vitesse des gaz	masse de gaz (carburant)	masse fusée (structure)	angle d'éjection
0,3	200	900	100	0

fusee_09.htm

Décollage vertical du sol à vitesse nulle. Courte phase propulsive avec contrainte de poussée orthoradiale/radiale suivie d'une trajectoire elliptique balistique.

Deuxième étage pour une mise en orbite quasiment circulaire autour de la Terre.

Troisième étage lancé à l'apogée autour de la Terre.

Passage au voisinage de la Lune.

Phase 4 de freinage insuffisant ($\alpha_4 = 180^\circ$) au passage au plus près de la Lune.

Croix rouge : nouvel étage mis en action. Croix jaune : fin de la phase propulsive (plus de carburant dans cet étage).

Vitesse initiale	Direction initiale	Altitude initiale	Pas de temps	n_calc
0	180	25	1	500

Etage 1 :

Débit gaz	vitesse des gaz	masse de gaz (carburant)	masse fusée (structure)	angle d'éjection
300	5000	148300	9700	0

Etage 2 :

Débit gaz	vitesse des gaz	masse de gaz (carburant)	masse fusée (structure)	angle d'éjection
1	600	8700	1000	0

Etage 3 :

Débit gaz	vitesse des gaz	masse de gaz (carburant)	masse fusée (structure)	angle d'éjection
0,3	300	900	100	0

Phase 4 de freinage :

Débit gaz	vitesse des gaz	masse de gaz (carburant)	masse fusée (structure)	angle d'éjection
0,3	200	900	100	180 (freinage)

fusee_10.htm

Contournement de la Lune. Freinage insuffisant en phase 4.

Vitesse initiale	Direction initiale	Altitude initiale	Pas de temps	n_calc
0	180	25	1	500

Etage 1 :

Débit gaz	vitesse des gaz	masse de gaz (carburant)	masse fusée (structure)	angle d'éjection
300	5000	148300	9700	0

Etage 2 :

Débit gaz	vitesse des gaz	masse de gaz (carburant)	masse fusée (structure)	angle d'éjection
1	600	8700	1000	0

Etage 3 :

Débit gaz	vitesse des gaz	masse de gaz (carburant)	masse fusée (structure)	angle d'éjection
0,3	350	900	100	0

Phase 4 de freinage :

Débit gaz	vitesse des gaz	masse de gaz (carburant)	masse fusée (structure)	angle d'éjection
0,3	200	900	100	180 (freinage)

[fusee_11.htm](#)

Mouvement de la Lune autour de la Terre accéléré d'un facteur 100.

[fusee_12.htm](#)

Contournement de la Lune et rotation inversée autour de la Terre. Retour vers la Lune. Phase 5 de freinage pour l'alunissage : pas assez de carburant pour freiner la chute sur la Lune, malgré la valeur énorme de la vitesse d'éjection des gaz (pas réaliste).

Vitesse initiale	Direction initiale	Altitude initiale	Pas de temps	n_calc
0	180	25	1	500

Etage 1 :

Débit gaz	vitesse des gaz	masse de gaz (carburant)	masse fusée (structure)	angle d'éjection
300	5000	148300	9700	0

Etage 2 :

Débit gaz	vitesse des gaz	masse de gaz (carburant)	masse fusée (structure)	angle d'éjection
1	600	8700	1000	0

Etage 3 :

Débit gaz	vitesse des gaz	masse de gaz (carburant)	masse fusée (structure)	angle d'éjection
0,3	350	900	100	0

Phase 4 de freinage :

Débit gaz	vitesse des gaz	masse de gaz (carburant)	masse fusée (structure)	angle d'éjection
0,3	350	900	100	180 (freinage)

Phase 5 de freinage :

Débit gaz	vitesse des gaz	masse de gaz (carburant)	masse fusée (structure)	angle d'éjection
0,01	6000000	900	100	180 (freinage)

[fusee_13.htm](#)

Contournement de la Lune et rotation inversée autour de la Terre. Freinage insuffisant en phase 4

Vitesse initiale	Direction initiale	Altitude initiale	Pas de temps	n_calc
0	180	25	1	500

Etage 1 :

Débit gaz	vitesse des gaz	masse de gaz (carburant)	masse fusée (structure)	angle d'éjection
300	5000	148300	9700	0

Etage 2 :

Débit gaz	vitesse des gaz	masse de gaz (carburant)	masse fusée (structure)	angle d'éjection
1	600	8700	1000	0

Etage 3 :

Débit gaz	vitesse des gaz	masse de gaz (carburant)	masse fusée (structure)	angle d'éjection
0,3	350	900	100	0

Phase 4 de freinage :

Débit gaz	vitesse des gaz	masse de gaz (carburant)	masse fusée (structure)	angle d'éjection
0,3	390	900	100	180 (freinage)

Phase 5 de freinage :

Débit gaz	vitesse des gaz	masse de gaz (carburant)	masse fusée (structure)	angle d'éjection
0,01	6000000	900	100	180 (freinage)

[fusee_14.htm](#)

Alunissage à vitesse modérée. On doit poser la fusée alors qu'il y a encore du carburant pour freiner la chute. La vitesse d'éjection des gaz doit être contrôlée avec une précision immense pour réduire la vitesse radiale ($V \approx 5,71 \text{ m.s}^{-1}$) de l'impact sur la Lune : $V_{\text{gaz}} = 7366671,221 \text{ m.s}^{-1}$. Il faudrait une précision encore beaucoup plus grande (valeur obtenue ici par dichotomie) pour que l'alunissage se fasse à moins de 1 m.s^{-1} .

Vitesse initiale	Direction initiale	Altitude initiale	Pas de temps	n_calc
0	180	25	1	500

Etage 1 :

Débit gaz	vitesse des gaz	masse de gaz (carburant)	masse fusée (structure)	angle d'éjection
300	5000	148300	9700	0

Etage 2 :

Débit gaz	vitesse des gaz	masse de gaz (carburant)	masse fusée (structure)	angle d'éjection
1	600	8700	1000	0

Etage 3 :

Débit gaz	vitesse des gaz	masse de gaz (carburant)	masse fusée (structure)	angle d'éjection
0,3	350	900	100	0

Phase 4 de freinage :

Débit gaz	vitesse des gaz	masse de gaz (carburant)	masse fusée (structure)	angle d'éjection
0,2	420	900	100	180 (freinage)

Phase 5 de freinage :

Débit gaz	vitesse des gaz	masse de gaz (carburant)	masse fusée (structure)	angle d'éjection
0,001	7366671,221	900	100	180 (freinage)

On notera dans cette simulation que la masse de carburant de l'étage 3 jusqu'à la phase 5 de freinage n'a pas été prise en compte dans la masse au décollage de la fusée. La vitesse d'éjection des gaz utilisée dans la phase 5 n'est évidemment pas réaliste. Elle peut être réduite en augmentant dans le même rapport la masse de carburant utilisée dans cette phase de freinage.

4 - Modification des feuilles de calcul

Les simulations sont programmées en langage HTML 5. Une feuille de style css très succincte est incorporée dans l'entête des pages. Une image de fond de 1100 pixels sur 650 est utilisée de façon accessoire. Les calculs sont programmés en Javascript dans l'entête des pages.

Ceci rend le contenu des pages éditable et autonome. Elles ont été testées avec Mozilla Firefox (navigateur internet gratuit).

Les tableaux du §3 donnent des exemples de jeux de données qui peuvent être édités avec un logiciel du type notepad++ (logiciel gratuit) après avoir téléchargé le code source de ces pages depuis le site www.tuclic.fr. Le dessin utilise la balise <canvas> dans le corps de la page.