Règles de calcul avec les puissances

1 - Produits de puissances : addition des exposants

$3^2 \times 3^4 = (3\times3)\times(3\times3\times3\times3)$

$= 3\times3\times3\times3\times3\times3$ On peut retirer les parenthèses.

$= 3^6$

$= 3^{(2+4)}$

$3^n \times 3^m = 3^{(n+m)}$

$a^2 \times a^4 = (a\times a)\times(a\times a\times a\times a)$

$= a\times a\times a\times a\times a\times a$

$= a^6$

$= a^{(2+4)}$

$a^n \times a^m = a^{(n+m)}$

$10^2 \times 10^4 = 100\times10000$ 2 zéros + 4 zéros

$= 1000000$ 6 zéros

$= 10^6$ "10 puissance 6"

$= 10^{(2+4)}$ 2 + 4 = 6

$10^n \times 10^m = 10^{(n+m)}$ n zéros +m zéros = (n + m) zéros

2 - Exposants négatifs

<u>Par définition</u> :

$3^{-1} \quad = \dfrac{1}{3} = 0,33\underline{3}...$

$a^{-1} \quad = \dfrac{1}{a}$ pour $a \neq 0$ (on ne peut pas diviser par 0)

$10^{-1} \quad = \dfrac{1}{10} = 0,1$ 1 est en première position après la virgule

$3^{-2} \quad = \dfrac{1}{3^2}$

$= \dfrac{1}{(3 \times 3)}$

$= \dfrac{1}{9}$

$= 0,11\underline{1}...$ (infinité de chiffres 1 après la virgule)

$3^{-5} \quad = \dfrac{1}{3^5}$

$= \dfrac{1}{(3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3)}$

$= \dfrac{1}{243}$

$= 0,\underline{004115226337448559670781893}...$ (la suite des chiffres soulignés se répète indéfiniment)

$10^{-2} \quad = \dfrac{1}{10^2}$

$= \dfrac{1}{(10 \times 10)}$

$= \frac{1}{100}$

$= 0{,}01$ chiffre 1 en 2ème position après la virgule

$10^{-5} = \frac{1}{10^5}$

$= \frac{1}{(10\times10\times10\times10\times10)}$

$= \frac{1}{100000}$ 5 zéros

$= 0{,}00001$ chiffre 1 en 5ème position après la virgule

<u>Convention</u> : on convient de l'écriture suivante pour un exposant nul :

$3^0 = 1$

$a^0 = 1$ pour $a \neq 0$

$10^0 = 1$

$3^1 = 3$ pour un exposant égal à 1

$a^1 = a$

$10^1 = 10$

On peut alors écrire, en faisant le calcul de 2 manières :

$3^2 \times 3^{-2} = 3^2 \times (\frac{1}{3^2})$

$= \frac{3^2}{3^2}$

$= \frac{9}{9} = 1$

On vérifie qu'il est possible d'additionner des exposants même s'ils sont négatifs :

$$3^2 \times 3^{-2} = 3^{(2-2)}$$

$$= 3^0$$

$= 1$ d'après la convention d'écriture pour un exposant nul

3 - Puissances : exposants positifs et négatifs

$$\frac{3^5}{3^2} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{3 \times 3}$$ on simplifie par 3 deux fois

$$= 3 \times 3 \times 3$$

$$= 3^3$$

$$= 27$$

$$= 3^3$$

$$= 3^{(5-2)}$$

$$= 3^5 \times 3^{-2}$$

$$\frac{3^2}{3^5} = \frac{3 \times 3}{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}$$ on simplifie par 3 deux fois

$$= \frac{1}{3 \times 3 \times 3}$$

$$= \frac{1}{3^3}$$

$$= \frac{1}{27}$$

$= 0{,}037\underline{037}...$

$$= \frac{1}{3^3}$$

$= 3^{-3}$

$= 3^{(2-5)}$

$= 3^{2}\times 3^{-5}$

$\dfrac{3^{5}}{3^{-2}} = 3^{5}\times 3^{2}$

$= 3^{(5+2)}$

$= 3^{7}$

$= 2187$

$\dfrac{10^{5}}{10^{2}} = \dfrac{10\times 10\times 10\times 10\times 10}{10\times 10}$ on simplifie par 10 deux fois

$= 10\times 10\times 10$

$= 10^{3}$

$= 1000$

$= 10^{3}$

$= 10^{(5-2)}$

$= 10^{5}\times 10^{-2}$

$= 100000\times 0{,}01$

$\dfrac{10^{2}}{10^{5}} = \dfrac{10\times 10}{10\times 10\times 10\times 10\times 10}$ on simplifie par 10 deux fois

$= \dfrac{1}{10\times 10\times 10}$

$= \dfrac{1}{10^{3}}$

$= \dfrac{1}{1000}$

$= 0{,}001$

$= \dfrac{1}{10^3}$

$= 10^{-3}$

$= 10^{(2-5)}$

$= 10^2 \times 10^{-5}$

$= 100 \times 0{,}00001$

$\dfrac{10^{-5}}{10^2} \quad = 10^{-5} \times 10^{-2}$

$= 10^{(-5-2)}$

$= 10^{-7}$

$= 0{,}0000001$

4 - Puissance de puissance : multiplication des exposants

$(3^2)^4$	$= 3^2 \times 3^2 \times 3^2 \times 3^2$	3^2 répété 4 fois
	$= (3\times3)\times(3\times3)\times(3\times3)\times(3\times3)$	4 parenthèses
	$= 3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3$	on retire les parenthèses : 8 facteurs
	$= 3^8$	
	$= 3^{(2\times4)}$	

$(3^m)^n \quad = 3^{(m\times n)}$ 3 puissance m, le tout à la puissance n

Avec un nombre a quelconque :

$(a^m)^n \quad = \quad a^{(m \times n)} \quad = \quad (a^n)^m$

Avec les puissances de 10 ($a=10$) :

"10 puissance 2, le tout à la puissance 3"

$(10^2)^3 \quad = \quad 10^2 \times 10^2 \times 10^2$ 3 facteurs : on additionne les exposants

$= \quad 10^{(2+2+2)}$ $2+2+2 \quad = \quad 2 \times 3$

$= \quad 10^{(2 \times 3)}$

$= \quad 10^6$

= 1000000 6 zéros

$(10^m)^n \quad = \quad 10^{(m \times n)}$ $m \times n$ zéros

5 - Puissance de puissance avec des exposants négatifs

$(3^2)^{-1} \quad = \quad \frac{1}{(3^2)}$ un nombre à la puissance -1 est l'inverse de ce nombre

$= \quad \frac{1}{9}$ = 0,11$\underline{1}$...

On essaie d'appliquer la règle pour une puissance de puissance avec l'exposant -1 :

$(3^2)^{-1} \quad = \quad 3^{(2 \times (-1))}$

$= \quad 3^{-2}$

$= \quad \frac{1}{3^2}$

$= \quad \frac{1}{9}$ = 0,11$\underline{1}$... la règle peut être appliquée

Plus généralement

$(a^m)^{-n} \quad = \quad (a^{-m})^n$

$= \quad a^{-(m \times n)}$

Avec le nombre 10 :

$\left(10^{m}\right)^{-n} \quad = \quad 10^{-(m\times n)}$

$= 0{,}000...0001$ avec le chiffre 1 à la $m\times n$ ième position après la virgule