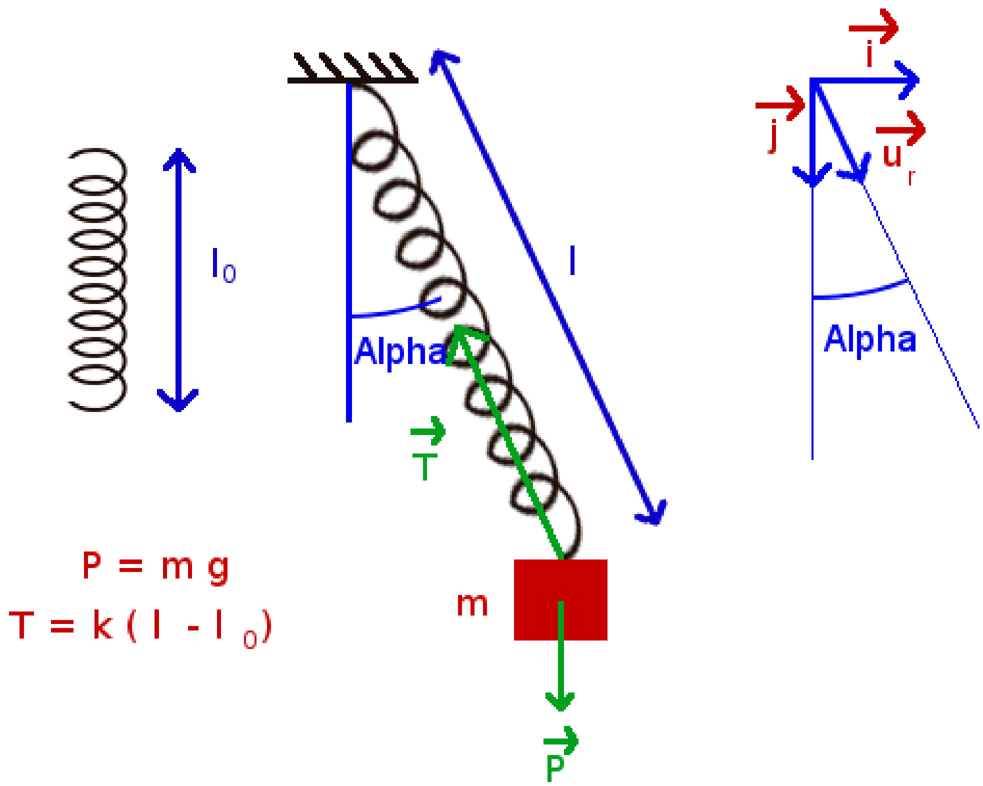
Oscillateur - Pendule
Masse - Ressort
Equations du mouvement
en coordonnées (l , α)

Le formalisme de Lagrange (par exemple : cours EPST page 15) permet d'établir les équations du mouvement de l'oscillateur masse - ressort en fonction de la longueur totale l du ressort et de l'angle α par rapport à la verticale descendante. Ces 2 variables sont des fonctions du temps.

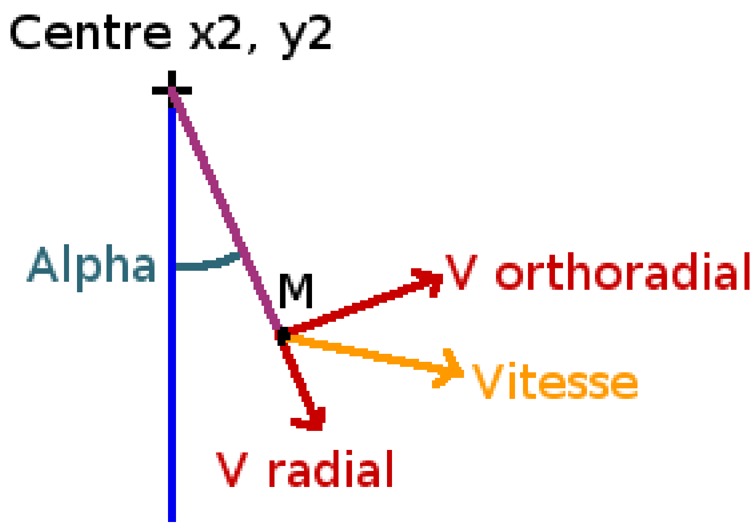


1 - Lagrangien du système Masse - Ressort

Le lagrangien du système est l'expression formelle, en fonction des variables qui caractérisent le mouvement :

$$L = Ec - Ep$$

où Ec est l'énergie cinétique du système et Ep son énergie potentielle : énergie potentielle de pesanteur plus énergie potentielle élastique du ressort.



La vitesse $\overrightarrow{v}$ de la masse M est :

$$\overrightarrow{v} = \frac{dl}{dt}\overrightarrow{u_r} + l\frac{d\alpha}{dt}\overrightarrow{u_\alpha}$$

où $\overrightarrow{u_r}$ est le vecteur unitaire radial et $\overrightarrow{u_\alpha}$ est le vecteur unitaire orthoradial.

On notera les dérivées par rapport au temps :

$$\frac{dl}{dt} = \dot{l} \quad \text{et} \quad \frac{d\alpha}{dt} = \dot{\alpha} \quad \text{avec des points.}$$

Comme les deux vecteurs unitaires $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\alpha}$ sont orthogonaux, on en déduit :

$$v^2 = \|\overrightarrow{v}\|^2 = \dot{l}^2 + l^2\dot{\alpha}^2$$

d'où :

$$Ec = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{l}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\alpha}^2$$

L'énergie potentielle de pesanteur Ep_p s'exprime (à une constante près qui disparaît ensuite) :

$$Ep_p = -mgl\cos(\alpha)$$

et l'énergie potentielle élastique du ressort Ep_{el} s'exprime :

$$Ep_{el} = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$$

où k est la raideur du ressort et l_0 sa longueur au repos. On en déduit le lagrangien du système :

$$L = Ec - Ep = \frac{1}{2}m\dot{l}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\alpha}^2 + mgl\cos(\alpha) - \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$$

2 - Equations de Lagrange du système Masse - Ressort

Pour un système de lagrangien $L = Ec - Ep$ dont l'énergie mécanique $Em = Ec + Ep$ est constante (système conservatif), possédant n degrés de liberté q_1, q_2, ... q_i, ..., q_n, on peut écrire n équations de Lagrange par dérivations formelles :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Dans le cas du système masse - ressort, les 2 degrés de liberté considérés peuvent être :

$$q_1 = l \qquad \text{et} \qquad q_2 = \alpha$$

On calcule les 4 dérivées partielles par rapport à l, $\dot{l}$, α et $\dot{\alpha}$:

$$\frac{\partial L}{\partial l} = ml\dot{\alpha}^2 - k\,(l - l_0) + mg\cos(\alpha)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{l}} = m\dot{l} \qquad \text{et} \qquad \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{l}}\right] = m\ddot{l}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = -mgl\sin(\alpha)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} = ml^2\dot{\alpha} \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}}\right] = 2ml\dot{l}\dot{\alpha} + ml^2\ddot{\alpha}$$

En reportant ces résultats dans les deux équations de Lagrange, on obtient le système de deux équations différentielles :

$$\begin{cases} 2ml\dot{l}\dot{\alpha} + ml^2\ddot{\alpha} + mgl\sin(\alpha) = 0 \\ m\ddot{l} - ml\dot{\alpha}^2 + k\,(l - l_0) - mg\cos(\alpha) = 0 \end{cases}$$

qui se simplifient légèrement :

$$\begin{cases} 2\dot{l}\dot{\alpha} + l\ddot{\alpha} + g\sin(\alpha) = 0 \\ \ddot{l} - l\dot{\alpha}^2 + \dfrac{k}{m}\,(l - l_0) - g\cos(\alpha) = 0 \end{cases}$$

Il s'agit de 2 équations non-linéaires du second ordre couplées.

3 - Cas limites

Si la longueur l du ressort est constante, $\dot{l} = 0$, la première équation se simplifie et on obtient l'équation du pendule simple :

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l}\sin(\alpha) = 0$$

qui peut être linéarisée pour une petite amplitude angulaire α :

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l}\alpha = 0$$

qui admet des solutions sinusoïdales.

De la même façon, en supposant $\alpha = 0$, on retrouve à partir de la deuxième équation le mouvement de l'oscillateur harmonique masse - ressort simple :

$$\ddot{l} + \frac{k}{m}\left(l - l_0\right) = 0$$

On peut supposer, dans une simplification moins radicale, que le mouvement d'élongation est peu perturbé par le mouvement pendulaire et est proche d'un mouvement sinusoïdal.

La deuxième équation du système fournit alors la valeur de $\dot{\alpha}^2$ en fonction du temps, qui peut être injectée dans la première équation. Ce terme est à l'origine du couplage des 2 mouvements et de leur synchronisation observée expérimentalement.