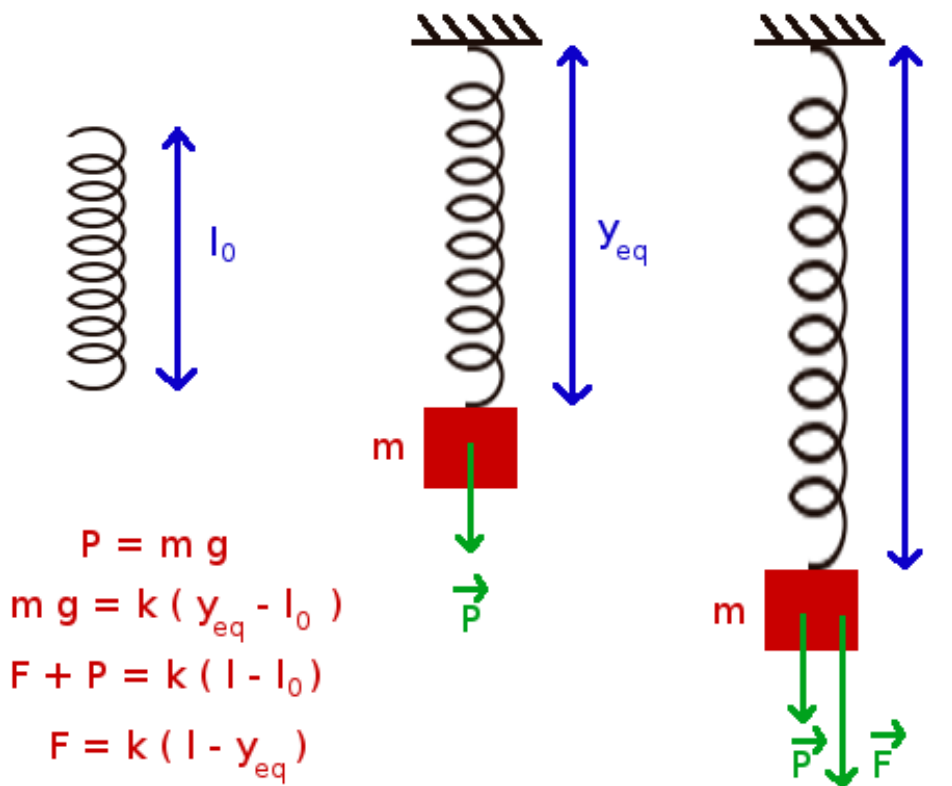


Etude de l'oscillateur - pendule

Masse - Ressort - Pesanteur

1 - Cadre de l'étude



L'oscillateur masse - ressort vertical fait l'objet d'une épreuve expérimentale du bac.

Un ressort est caractérisé par sa longueur à vide l_0 (longueur du ressort en mètre lorsqu'aucune force ne lui est appliquée). Il est également caractérisé par sa raideur k (en N.m^{-1}). Pour donner au ressort une longueur totale l , il faut appliquer à chacune de ses extrémités une force :

$$T = k(l - l_0)$$

Il s'agit d'une force de rappel. Plus la raideur k est grande, plus il faut "tirer fort" sur le ressort pour l'allonger ou pour le comprimer.

Un ressort a une extrémité fixée à une potence. On suspend une masse m à l'autre extrémité du ressort. La position d'équilibre stable correspond à une longueur y_{eq} du ressort telle que :

$$k(y_{eq} - l_0) = mg$$

$y_{eq} - l_0$ correspond à l'allongement du ressort par rapport à sa longueur à vide l_0 . $g = 9,81 \text{ N.kg}^{-1}$ est l'intensité de la pesanteur.

On écarte la masse de sa position d'équilibre en la tirant vers le bas d'une distance Δy , et on lâche la masse, a priori sans vitesse initiale. La masse se met alors à osciller verticalement de part et d'autre de sa position d'équilibre :

$$y(t) = y_{eq} + \Delta y \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

où :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

est la pulsation propre de l'oscillateur. $y(t)$ est en effet solution de l'équation différentielle linéaire :

$$m\ddot{y}(t) = -k(y(t) - y_{eq}) + mg$$

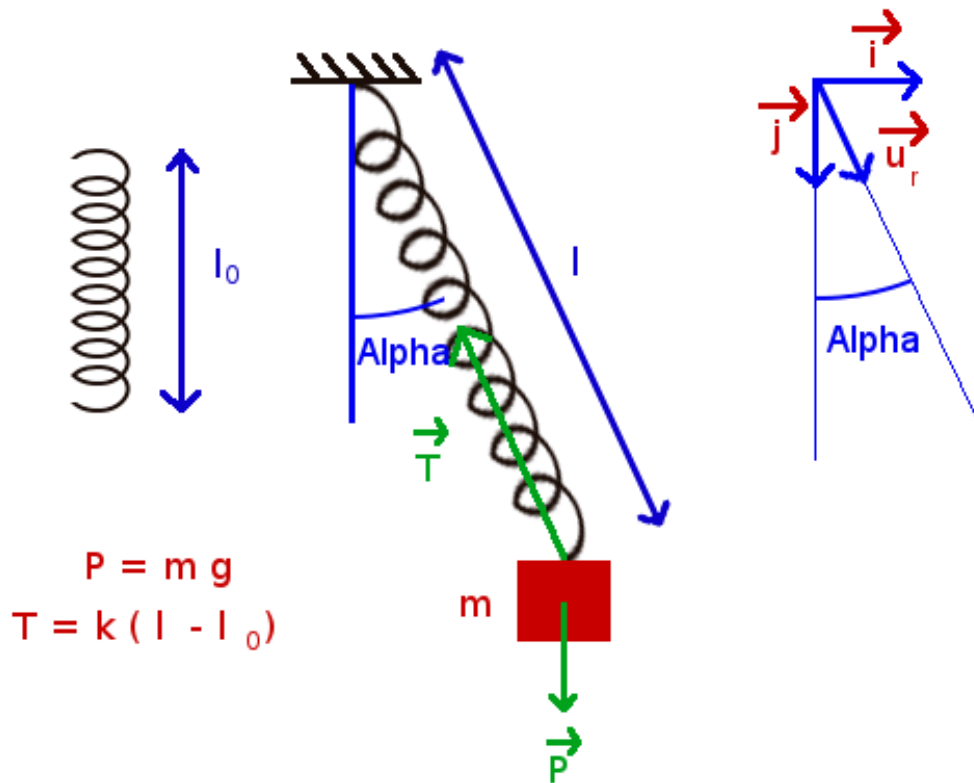
C'est la deuxième loi de Newton qui relie l'accélération $\ddot{y}(t)$ et les forces appliquées (force exercée par le ressort sur la masse m et son poids). La phase $\varphi = 0$ correspond à une vitesse initiale nulle.

La [vidéo](#) (youtube 4' 25") de l'expérience en question montre que le problème n'est pas forcément aussi simple et que la masse peut se mettre à osciller latéralement avec un mouvement pendulaire superposé au mouvement oscillant vertical.

Une solution simple pour éviter ce mouvement pendulaire consiste à ajouter un fil entre le ressort et la masse suspendue. Tout se passe comme si la longueur à vide du ressort était augmentée de la longueur du fil. On notera donc l_0 la longueur à vide du ressort incluant la longueur du fil ajouté. On voit l'effet stabilisant du fil sur cette vidéo.

L'étude présentée ici concerne l'oscillation masse-ressort en incluant la possibilité du mouvement pendulaire latéral.

2 - Analyse du problème



La masse m a pour coordonnées $(x(t), y(t))$ dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) où O est le point d'ancrage du ressort. La longueur l du ressort est :

$$l(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$$

La tension \vec{T} du ressort s'exprime :

$$\vec{T} = -k(l - l_0)\vec{u}_r = -k(l - l_0)(\sin(\alpha)\vec{i} + \cos(\alpha)\vec{j})$$

Le poids de la masse suspendue s'exprime :

$$\vec{P} = m g \vec{j}$$

La deuxième loi de Newton, projetée sur la base (\vec{i}, \vec{j}) , donne les deux équations différentielles non linéaires couplées :

$$\begin{cases} m\ddot{x}(t) = -k(l(t) - l_0) \sin(\alpha(t)) \\ m\ddot{y}(t) = -k(l(t) - l_0) \cos(\alpha(t)) + mg \end{cases}$$

Avec :

$$\sin(\alpha(t)) = \frac{x(t)}{l(t)} \quad \text{et} \quad \cos(\alpha(t)) = \frac{y(t)}{l(t)}$$

L'évolution de $x(t)$ et $y(t)$ est calculée, dans les simulations en langage Python jointes, par la méthode d'Euler, suffisamment précise et simple pour une évolution sur quelques dizaines de milliers de pas de temps. L'utilisation d'une méthode de Runge-Kutta aurait été préférable pour réduire le temps calcul et améliorer la précision.

3 - Etude numérique de l'influence de la longueur à vide du ressort - Données communes

Les paramètres qui resteront constants dans les paragraphes qui suivent (jeu de données S1) sont :

$m = 0,3 \text{ kg}$	masse
$g = 9,81 \text{ N.kg}^{-1}$	intensité de la pesanteur
$\alpha_0 = 2^\circ$	angle initial (petit)
$\Delta y = 0,2 \text{ m}$	allongement initial par rapport à la position d'équilibre
$\Delta t = 0,001 \text{ s}$	pas de temps pour la méthode d'Euler

Le dispositif étant non-linéaire, l'allongement initial a une influence sur la nature de la trajectoire. On s'attend à avoir ici une amplitude d'oscillation de $\pm 0,2 \text{ m}$ par rapport à la position d'équilibre.

Le paramètre étudié ici d'une manière qui pourrait être appelée "expérimentale", par simulation, est la longueur à vide l_0 .

La correspondance entre les valeurs de l_0 et le numéro "nn" du fichier "_02_03_nn.py" de la simulation Python du dossier "[pendule_fichiers/pendule_06_03](#)" est donnée dans le tableau ci-dessous :

Référence simulation	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14
nom: _02_03_nn.py	01	02	03	04	11	10	12	13	09	08	07	06	14	05
l_0 en mètre	1,2	1,0	0,8	0,6	0,59	0,58	0,575	0,5725	0,57	0,56	0,55	0,5	0,45	0,40

Référence simulation	A15	A16	A17	A18	A19	A20	A21	A22
nom : _02_03_nn.py	15	16	17	18	19	20	21	22
l_0 en mètre	0,35	0,30	0,25	0,20	0,15	0,10	0,05	0,0

Ce dossier comprend également, pour chaque simulation "nn" un fichier texte Max_00nn.txt en format séparateur ";" qui contient les instants et les extréma du mouvement d'élongation et ceux du mouvement pendulaire, créé par la simulation Python. Ce fichier est destiné à être collé dans un tableur comme LibreOffice Calc ou Excel pour analyser les résultats. Le nom de ce fichier texte est donné lignes 98, 200 et 201 dans la procédure Python dans la variable numfic et doit être changé pour ne pas écraser le précédent fichier.

Le dossier comprend également les fichiers obtenus avec LibreOffice Calc pour analyser ces données : max_00nn.ods.

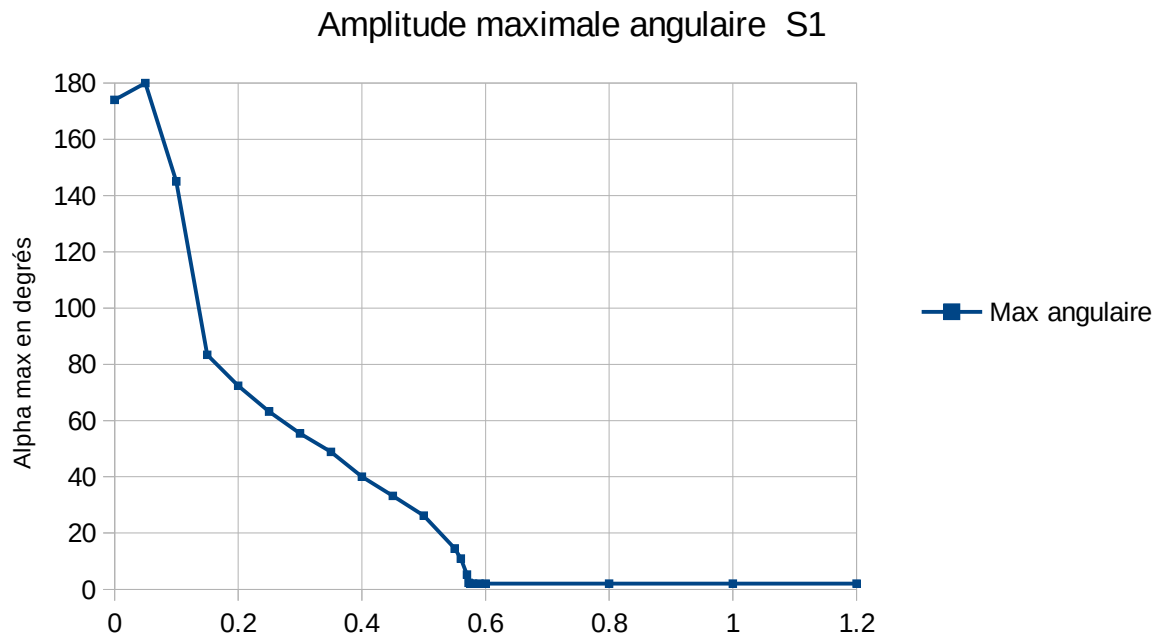
Les courbes obtenues pour chaque valeur de la longueur à vide l_0 avec le tableur LibreOffice Calc se trouvent dans l'[annexe A](#). Ces courbes montrent l'évolution temporelle du maximum et du minimum d'élongation et ainsi que ceux du mouvement pendulaire. Des diagrammes montrent également comment évoluent les périodes associées.

Parmi les tendances, on note une indépendance des périodes d'élongation et angulaire pour les grandes valeurs de l_0 (2 mouvements oscillants indépendants). Le mouvement pendulaire seul dépend de l'intensité de la pesanteur g et de la longueur l du pendule. Le mouvement d'élongation seul dépend de la raideur k du ressort et de la masse m .

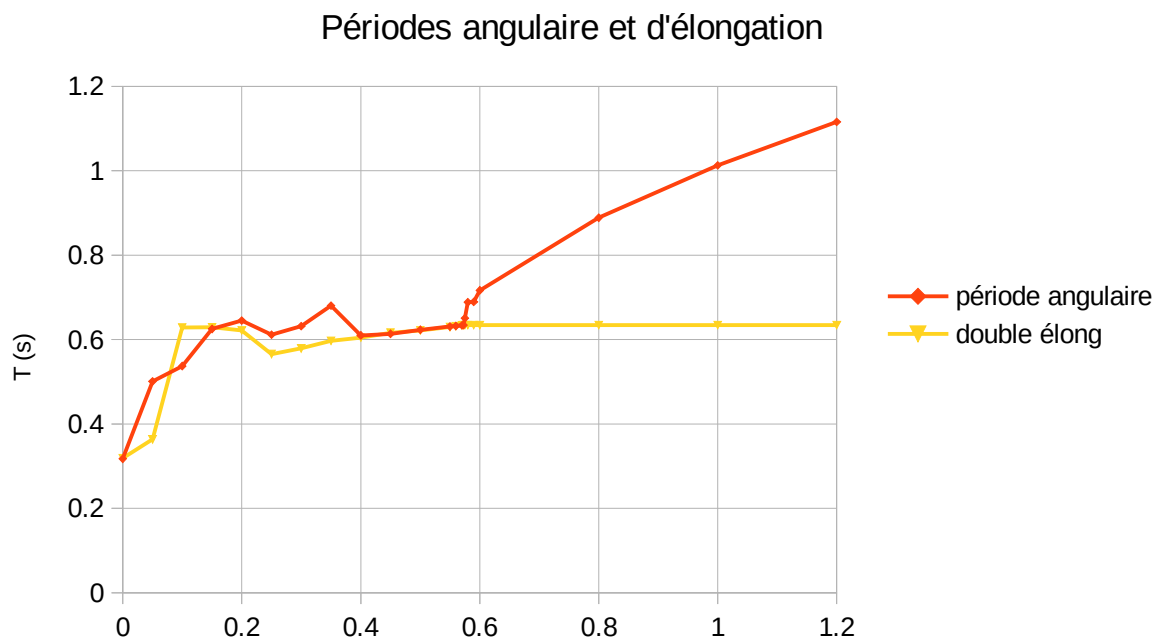
La valeur remarquable $l_0 = 1,5725$ m correspond à l'égalité de la demi-période angulaire et de la période d'élongation. La valeur $l_0 = 1,5725$ m correspond à une transition entre une amplitude angulaire inférieure à 2° pour les longueurs à vide plus grandes, et une amplitude angulaire supérieure à 2° pour les longueurs à vide du ressort plus petites.

Les valeurs de l_0 plus petites correspondent d'abord à une synchronisation des périodes, puis une disparition des mouvements pendulaire et d'élongation pour l_0 inférieur à 0,35 m.

Le double caractère oscillateur - pendule réapparaît pour les petites valeurs $l_0 = 0,05$ m et le cas très particulier de resynchronisation (disparition de la non-linéarité) pour $l_0 = 0,0$ m.



Abscisse : longueur à vide l_0 du ressort.



Abscisse : longueur à vide l_0 du ressort.

4 - Etude numérique de l'influence de la longueur à vide du ressort - 1

$1,2 \text{ m} \geq L_0 \geq 0,6 \text{ m}$

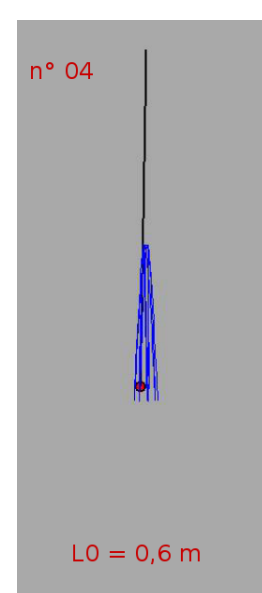
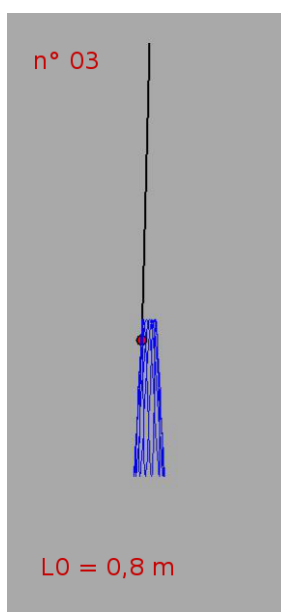
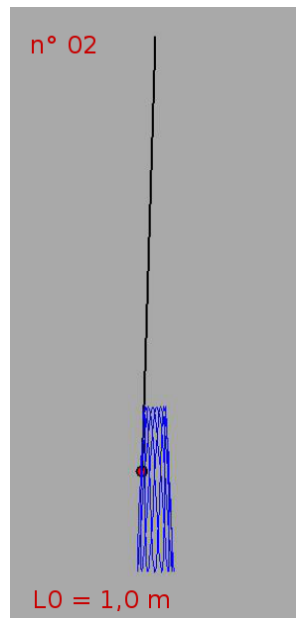
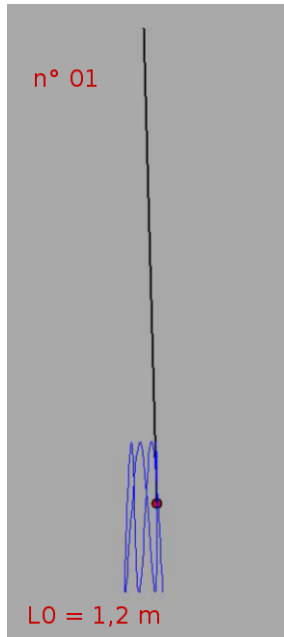
Les paramètres qui resteront constants sont le jeu de données S1 (§3). Chacune des figures ci-dessous renvoie par un lien à une courte animation du mouvement.

$$l_0 = 1,2 \text{ m}$$

$$l_0 = 1,0 \text{ m}$$

$$l_0 = 0,8 \text{ m}$$

$$l_0 = 0,6 \text{ m}$$



On observe sur ces animations le mouvement oscillant presque vertical et le mouvement pendulaire d'amplitude très voisine de 2° , valeur initiale de l'angle par rapport à la verticale.

L'amplitude d'élongation verticale est presque constante, mais présente une légère évolution qui s'apparente à un bruit numérique. Le passage à un pas de temps pour le calcul 10 fois plus petit $\Delta t = 0,0001 \text{ s}$ ne fait pas disparaître cette structure temporelle, ce qui montre son existence réelle.

La période d'élongation est constante, alors que la période angulaire est modulée par des battements entre les deux fréquences propres d'élongation et pendulaire (voir [annexe A](#)).

Pour la première simulation, 7 périodes d'élongation correspondent presque exactement à 2 périodes angulaires :

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{0,3}{29,43}} = 0,6343739 \text{ s} \quad (\text{période d'élongation})$$

proche de la valeur "expérimentale" moyennée sur 32 périodes d'élongation : 0,63431 s

et :

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (\text{période angulaire})$$

où il n'est pas évident de donner la valeur de l puisque cette valeur oscille de 1,1 m à 1,5 m ($1,3 \text{ m} \pm 0,2 \text{ m}$). On peut par contre déduire T_2 de la simulation, et calculer la longueur l qui correspondrait. On trouve :

$$T_2 = 2,235625013 \text{ s} \quad (\text{valeur moyennée sur 8 périodes angulaires})$$

et on en déduit :

$$l = 1,2419588 \text{ m}$$

proche de la valeur :

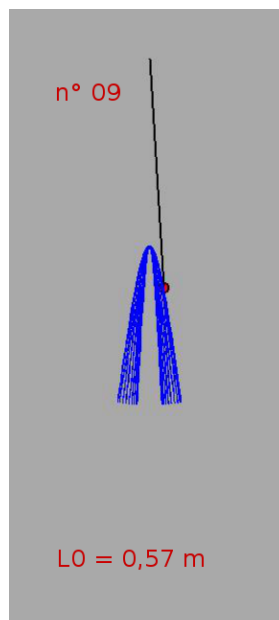
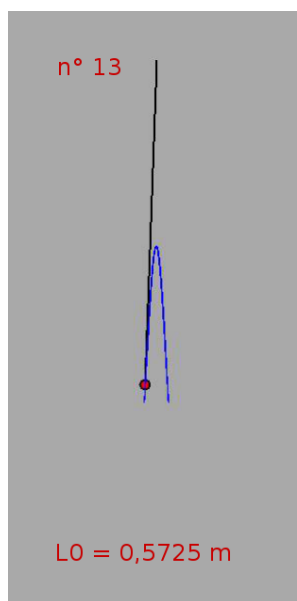
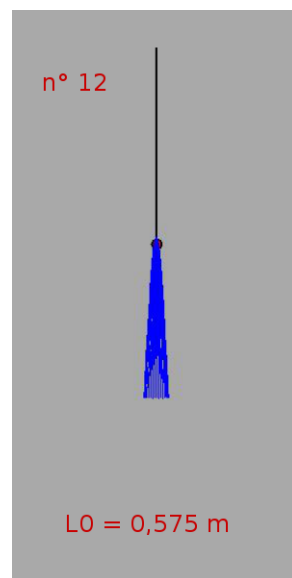
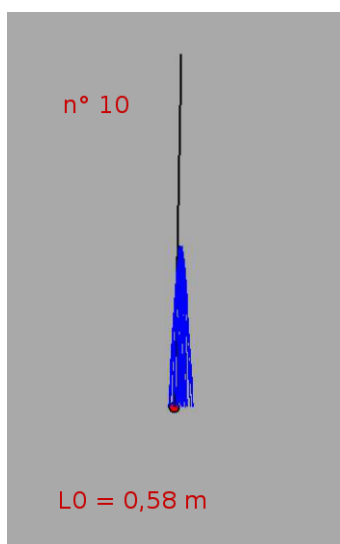
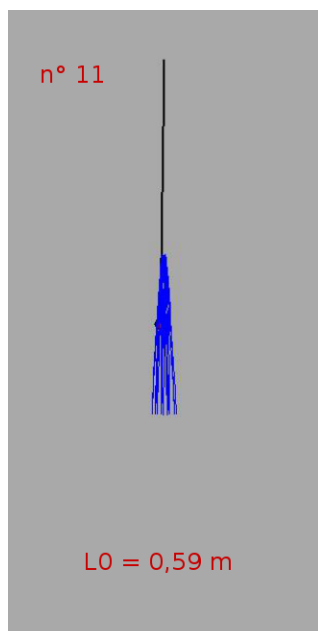
$$y_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k} = 1,2 + \frac{0,3 \times 9,81}{29,43} = 1,3 \text{ m}$$

mais cependant différente.

5 - Etude numérique de l'influence de la longueur à vide du ressort - 2

L_0 voisin de 0,5725 m

Les paramètres qui resteront constants sont le jeu de données S1 (§3). Chacune des figures ci-dessous renvoie par un lien à une courte animation du mouvement.



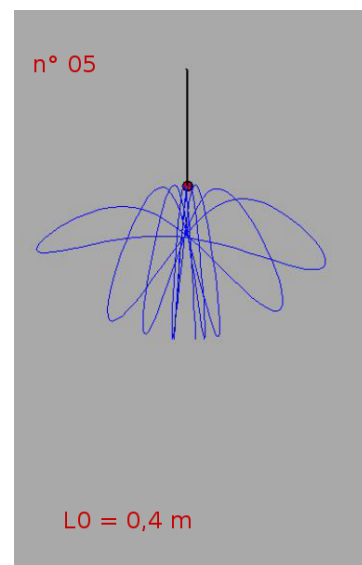
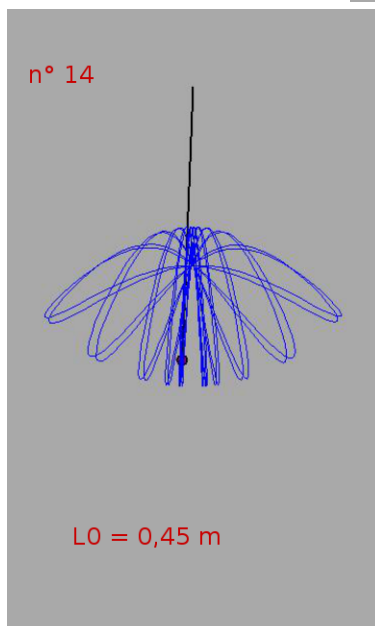
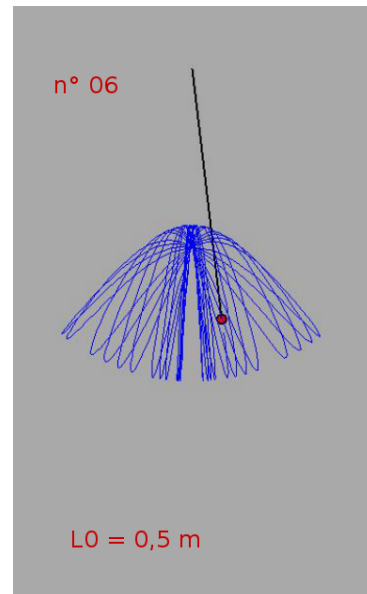
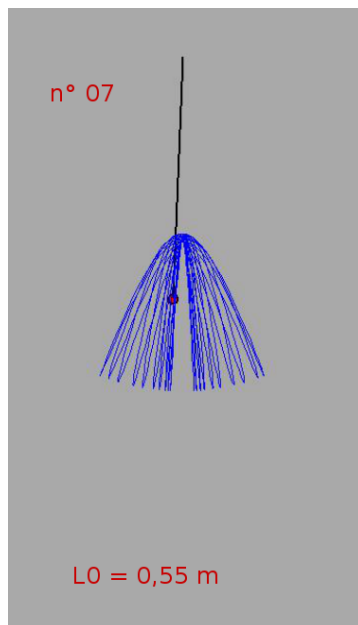
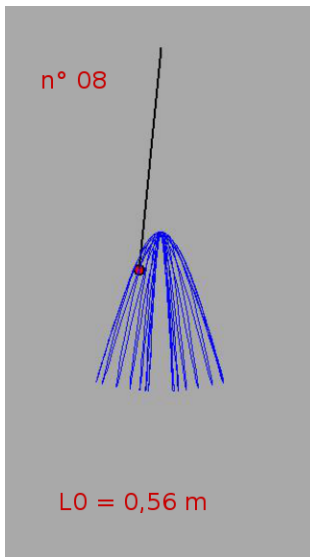
On observe bien le changement du mouvement pendulaire pour la valeur $l_0 = 0,5725$ m.

Pour cette valeur, le document A8 de l'[annexe A](#) montre une évolution très lente des amplitudes angulaires et d'élongation. Cette évolution a un caractère sinusoïdal très régulier et une amplitude qui tend vers zéro pour l'égalité parfaite des périodes des 2 mouvements oscillatoire et pendulaire.

6 - Etude numérique de l'influence de la longueur à vide du ressort - 3

$0,56 \text{ m} \geq L_0 \geq 0,4 \text{ m}$

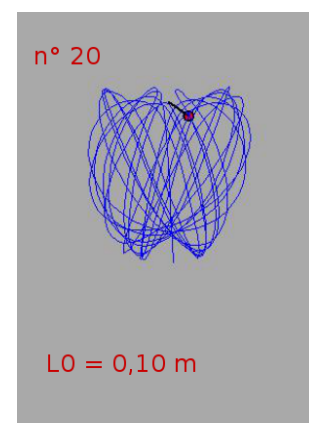
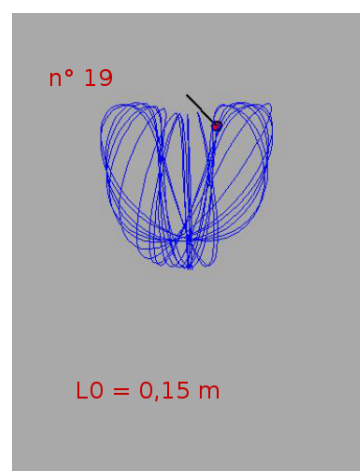
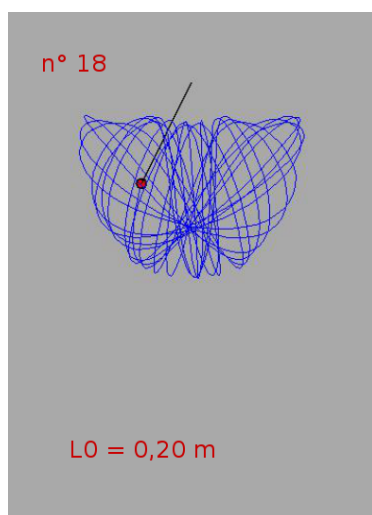
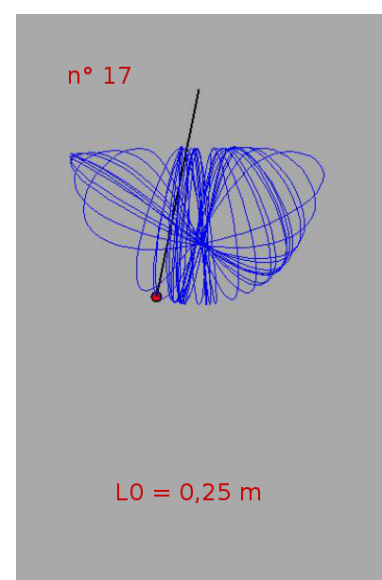
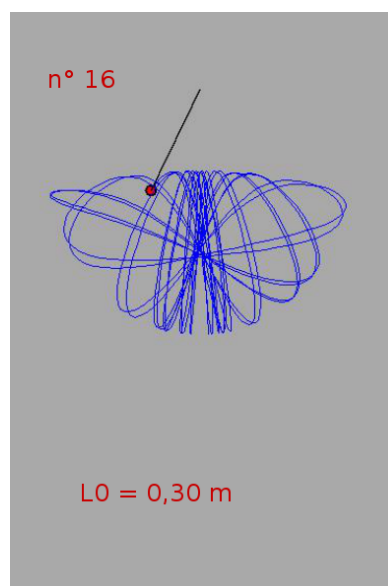
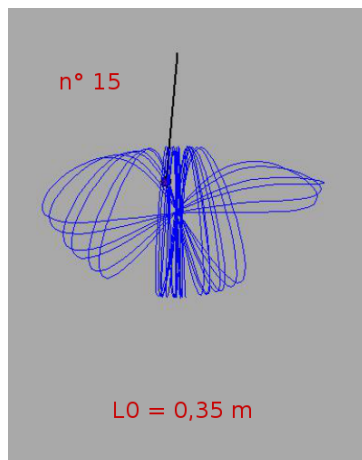
Les paramètres qui resteront constants sont le jeu de données S1 (§3). Chacune des figures ci-dessous renvoie par un lien à une courte animation du mouvement.



L'amplitude angulaire augmente lorsque la longueur à vide du ressort diminue. Elle reste toujours supérieure à la valeur initiale 2° . Le cas fortuit $l_0 = 0,4$ m correspond à un rapport rationnel simple des 2 périodes d'élongation et pendulaire. Les [annexes](#) A10 à A14 montrent bien les régularités temporelles des amplitudes et des périodes, sous forme de battements.

7 - Etude numérique de l'influence de la longueur à vide du ressort - 4 $0,35 \text{ m} \geq L_0 \geq 0,10 \text{ m}$

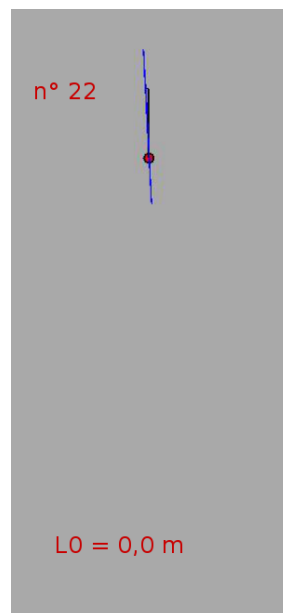
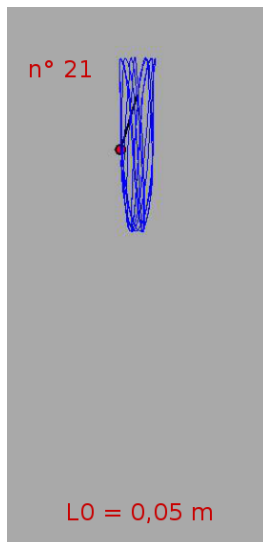
Les paramètres qui resteront constants sont le jeu de données S1 (§3). Chacune des figures ci-dessous renvoie par un lien à une courte animation du mouvement.



Ces mouvements sont caractérisés par une fusion du mode d'élongation et du mode pendulaire. Les courbes en [annexe](#) A15 à A20 montrent une disparition des régularités temporelles dans les amplitudes et dans les périodes.

8 - Etude numérique de l'influence de la longueur à vide du ressort - 5 $L_0 \leq 0,05 \text{ m}$

Les paramètres qui resteront constants sont le jeu de données S1 (§3). Chacune des figures ci-dessous renvoie par un lien à une courte animation du mouvement.



On retrouve un mode d'élongation et un mode pendulaire pour $l_0 = 0,05 \text{ m}$.

Le mouvement est linéaire périodique lorsque la longueur du ressort au repos est nulle. Le problème ne comporte plus de non linéarité et les équations du paragraphe 2 en coordonnées cartésiennes peuvent être résolues et elles donnent le même résultat que la simulation numérique.

9 - Autres résultats

De très nombreuses situations peuvent être modélisées. Les simulations 1 à 72 du dossier [pendule_fichiers/mecalab_05_pendule_02/](#) montrent comment une modification de l'élongation initiale peut être compensée par une modification de la raideur du ressort pour retrouver une trajectoire homothétique.

On peut également constater des invariances strictes lorsque le rapport de l'intensité de la pesanteur sur la raideur du ressort est maintenu constant.

On peut également observer des périodicités courtes lorsque les périodes d'élongation et pendulaire sont dans des rapports simples, et voir sous quelles conditions ces mouvements sont conservés en faisant varier des paires de paramètres.

On pourra regarder les simulations :

mecalab_05_pendule_02_43.py
mecalab_05_pendule_02_45.py
mecalab_05_pendule_02_48.py
mecalab_05_pendule_02_54.py
mecalab_05_pendule_02_58.py
mecalab_05_pendule_02_59.py
mecalab_05_pendule_02_61.py
mecalab_05_pendule_02_70.py

mecalab_05_pendule_02_16.py
mecalab_05_pendule_02_17.py
mecalab_05_pendule_02_27.py
mecalab_05_pendule_02_42.py