Présentation de Mécalab version 5

1 - Ce que fait Mécalab

Mécalab est une application écrite en langage Python qui permet de calculer le mouvement plan d'un point matériel soumis à des forces. Mécalab effectue un pointage sur la trajectoire à intervalle de temps régulier, ici Δt = 0,04 s. Toute autre valeur peut être utilisée. Mécalab permet de tracer très précisément et très rapidement les grandeurs vectorielles caractéristiques du mouvement, et d'afficher leurs composantes suivant x et y, ainsi que leur norme ("valeur" du vecteur dans le Système International d'unités). Les valeurs numériques affichées peuvent donner lieu à un travail de vérification à partir de la définition de ces grandeurs. Les grandeurs auxquelles Mécalab donne accès sont:

- les coordonnées et l'instant correspondant d'un point de la trajectoire (point "pointé" par Mécalab),
- Le vecteur déplacement entre 2 points,
- Le vecteur vitesse moyenne pour un déplacement donné,
- Le vecteur variation de vitesse par soustraction de 2 vecteurs vitesse,
- Le vecteur force $\overrightarrow{F}$ en un point, qui est une donnée pour le calcul de la trajectoire.

On a alors les éléments pour vérifier sur les exemples la relation entre le vecteur variation de vitesse et le vecteur force :

$$m \cdot \overrightarrow{\Delta V} = \Delta t \cdot \overrightarrow{F}$$

- Le vecteur accélération $\overrightarrow{a}$ à partir du vecteur variation de vitesse.

On a alors les éléments pour vérifier sur les exemples la 2ème loi de Newton :

$$\overrightarrow{F} = m \cdot \overrightarrow{a}$$

Mécalab donne également accès aux grandeurs suivantes :

- La décomposition de l'accélération en ses composantes normale et tangentielle, par projection vectorielle d'un vecteur sur une direction, ici celle du vecteur vitesse,
- Le centre de courbure de la trajectoire à partir de l'accélération normale et de la vitesse,
- Les composantes radiale et orthoradiale de la vitesse par projection, un point central S étant choisi,
- Le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma_S}$ par rapport au point central choisi S,
- Le moment d'une force $\overrightarrow{M_S}$ par rapport à un point S.

On a alors les éléments pour vérifier sur les exemples le théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\overrightarrow{\sigma_S}}{dt} = \overrightarrow{M_S}$$

- Il est possible de vérifier la 2ème loi de Kepler pour une force centrale (moment cinétique constant).

Il est évidemment très facile de modifier l'expression de la force qui s'exerce sur le point matériel dans la procédure Python Mécalab: poids, ressort, pendule, système planétaire, champs divers, etc.
Le détail des commandes est indiqué à l'adresse suivante :

www.tuclic.fr/python_phy/mecalab/doc_mecalab_02.pdf

Des exemples de fichiers Mécalab se trouvent dans le dossier :

www.tuclic.fr/python_phy/mecalab/mecalab_02.zip

2 - Trajectoire d'un point matériel

Lancer Mécalab par Double-Clic sur un fichier d'application Mécalab (extension .py). Cela lance la version de Python installée (Python, EduPython, IDLE, JupyterLab, ...). La façon dont Python demande les valeurs à introduire par l'utilisateur dépend de cette version et de l'environnement.

Dans l'exemple pris, il s'agit du fichier "mecalab_05_poids_cartesienne.py" avec Python.

La fenêtre Mécalab s'ouvre, avec à gauche la zone de tracé et à droite les commandes pour les constructions et l'affichage des valeurs.

"Démarrer" lance le calcul de la trajectoire et le mouvement du point matériel sur la zone de tracé.

"Arrêter" stoppe le calcul et le mouvement.

Il convient de cliquer d'abord sur "Trajectoire" (avant "Démarrer") si on veut que la trajectoire soit tracée et le pointage effectué.

3 - Déplacement, vitesse, variation de vitesse

Le repère d'étude Oxy a son origine en haut à gauche de la fenêtre, axe Ox horizontal vers la droite, axe Oy vertical vers le bas. Les boutons-radio "Tous", "Déplacement", "Vitesse", "Accélération" et "Force" permettent de ne sélectionner que les éléments voulus avec la souris.

On se fixe comme objectif de construire le vecteur variation de vitesse $\overrightarrow{\Delta V4}$ au point P4 sur la trajectoire, dans le cas d'une masse m = 0,3 kg lancée dans le champ de pesanteur terrestre g = 9,81 $N.kg^{-1}$: la force appliquée est $\overrightarrow{F} = m \cdot \overrightarrow{g}$ dirigée verticalement vers le bas.

On va donc construire les vecteurs vitesse $\overrightarrow{V3}$ et $\overrightarrow{V5}$ aux points P3 et P5, et faire leur différence $\overrightarrow{V5} - \overrightarrow{V3}$ pour obtenir une valeur précise du vecteur $\overrightarrow{\Delta V4}$.

Le vecteur $\overrightarrow{V3}$ va être obtenu à partir du vecteur déplacement $\overrightarrow{D24}$ entre les points P2 et P4.

Le vecteur $\overrightarrow{V5}$ va être obtenu à partir du vecteur déplacement $\overrightarrow{D46}$ entre les points P4 et P6.

Le fait d'encadrer le point où on cherche à obtenir la vitesse (un point avant et un point après) permet d'avoir une bonne précision. On peut cependant faire un autre choix. Il faut alors modifier la valeur "Nb pas vitesse" fixée à 2 par défaut (2 pas de temps Δt pour le déplacement qui donnera la vitesse).

<u>a - Vecteurs vitesse</u>

On sélectionne le point P2 par Clic-Gauche.

Ses coordonnées x = 0,26 m et y = 1,251784 m sont indiquées à droite, ainsi que l'instant correspondant t = 0,08 s.

Maj-Clic-Gauche sur le point P4 : on obtient le vecteur déplacement $\overrightarrow{D24}$.

Clic-Gauche sur le vecteur déplacement $\overrightarrow{D24}$ pour obtenir ses caractéristiques : composantes x = 0,16 m et y = -0,185431 m (obtenues par différence des coordonnées x et y des points P4 et P2) et sa norme D24 = 0,244918 m (la longueur en mètre de ce vecteur). Rappel : l'axe Ox est orienté vers la droite et l'axe Oy vers le bas.

"Déplacement --> Vitesse" pour obtenir le vecteur vitesse $\overrightarrow{V3}$. Sélectionner ce vecteur par Clic-Gauche. Le calcul est simple : les composantes x et y du déplacement sont divisées par 2 pas de temps, soit 0,08 s, pour obtenir les composantes V3x = 2 m.s^{-1} et V3y = -2,317895 m.s^{-1} du vecteur vitesse V3, dont la norme V3 = 3,061476 m.s^{-1} (la valeur de la vitesse en m.s^{-1}) est également affichée. Il s'agit d'une très bonne approximation de la vitesse instantanée au point P3.

On fait de même pour obtenir le vecteur vitesse $\overrightarrow{V5}$ au point P5 : Clic-Gauche sur P4, Maj-Clic-Gauche sur P6, sélection de $\overrightarrow{D46}$ par Clic-Gauche, "Déplacement --> Vitesse". La vitesse a varié en direction et en norme.

<u>b - différence vectorielle</u>

Sélectionner $\overrightarrow{V3}$ par Clic-Gauche. Clic-Droit pour obtenir son opposé. On détruit $\overrightarrow{V3}$ par Maj-Clic-Droit. On sélectionne $-\overrightarrow{V3}$ par Clic-Gauche. On le reporte au bout de $\overrightarrow{V5}$ par Maj-Clic-Gauche sur l'extrémité de $\overrightarrow{V5}$.

Pour sommer $\overrightarrow{V5}$ et $-\overrightarrow{V3}$: Clic-Gauche sur $\overrightarrow{V5}$ et Maj-Clic-Gauche sur $-\overrightarrow{V3}$ (reconstruit à partir de l'extrémité de $\overrightarrow{V5}$). On obtient le vecteur variation de vitesse $\overrightarrow{\Delta V4}$. Sélectionner $\overrightarrow{\Delta V4}$ par Clic-Gauche. Ses caractéristiques apparaissent à droite : ΔV4x = 0 m.s^{-1} ΔV4y = 0,784799 m.s^{-1} ainsi que sa norme ΔV4 = 0,784799 m.s^{-1} (égale ici à ΔV4y puisque ΔV4x est nul).

4 - Relation entre le vecteur variation de vitesse et la force appliquée

On affiche le vecteur force $\overrightarrow{F4}$ en P4 par Clic-Gauche sur P4 et Ctrl-Clic-Gauche (n'importe où).

Ses caractéristiques apparaissent à droite : composante F4x nulle et composante F4y = m g = 0,3 kg $\times$ 9,81 $N.kg^{-1}$ = 2,943 N.

On vérifie que $\overrightarrow{\Delta V4}$ et $\overrightarrow{F4}$ sont colinéaires.

On vérifie en valeurs que ΔV4 . m / (2 Δt) = F4 :

0,784799 $m.s^{-1}$ $\times$ 0,3 kg / (2 $\times$ 0,04 s) = 2,942996 N = F4 . Ceci permet d'identifier ces 2 vecteurs.

5 - Accélération - Accélération tangentielle - Accélération normale

a - Accélération

Le vecteur $\frac{1}{2\ \Delta t} \times \overrightarrow{\Delta V4}$, obtenu par pointage, n'est autre que que le vecteur accélération $\overrightarrow{A4}$ du point matériel : dérivée du vecteur vitesse $\overrightarrow{V4}$ par rapport au temps. On obtient le tracé par Mécalab du vecteur accélération $\overrightarrow{A4}$ au point P4 en sélectionnant le vecteur $\overrightarrow{\Delta V4}$ (Clic-Gauche) et en cliquant sur "Vitesse --> Accélération" (attention : 2 pas de temps Δt puisque $\overrightarrow{\Delta V4}$ a été obtenu à partir de $\overrightarrow{V3}$ et de $\overrightarrow{V5}$). Le calcul effectué par Mécalab est simple : division de ΔV4x et ΔV4y par 2 Δt pour obtenir A4x et A4y.

Sélectionner le vecteur accélération par Clic-Gauche. Ses caractéristiques sont indiquées à droite : A4x = 0 $m.s^{-2}$, A4y = 9,809999 $m.s^{-2}$ = g et sa norme A4, égale ici à A4y puisque A4x est nulle.

On voit que les constructions sont très précises puisque g = 9,81 $N.kg^{-1}$ est une donnée pour calculer la trajectoire et A4 = 9,81 $m.s^{-2}$ est déduit du calcul de la trajectoire, du pointage et des constructions.

C'est une façon de vérifier la 2ème loi de Newton sur un mouvement calculé, comme on peut le faire avec un pointage réel ou une chronophotographie :

$$\overrightarrow{F} = m \cdot \overrightarrow{a}$$

b - Accélération tangentielle

On va projeter le vecteur accélération $\overrightarrow{A4}$ sur un vecteur tangent à la trajectoire au point P4 : le vecteur vitesse $\overrightarrow{V4}$.

On construit d'abord $\overrightarrow{V4}$: Clic-Gauche sur le point P3. Maj-Clic-Gauche sur le point P5. On sélectionne le vecteur déplacement $\overrightarrow{D35}$ par Clic-Gauche. On en déduit le vecteur vitesse $\overrightarrow{V4}$ par "Déplacement --> Vitesse". On sélectionne $\overrightarrow{V4}$ par Clic-Gauche et on le déplace en P4 par Maj-Clic-Gauche sur P4. On détruit $\overrightarrow{V4}$ d'origine P3 par Maj-Clic-Droit.

On projette $\overrightarrow{A4}$ sur $\overrightarrow{V4}$: Sélectionner $\overrightarrow{V4}$ par Clic-Gauche. Ctrl-Maj-Clic-Gauche sur le vecteur accélération $\overrightarrow{A4}$: on obtient sa projection sur la direction de $\overrightarrow{V4}$, donc la composante tangentielle de l'accélération $\overrightarrow{A4t}$. Eventuellement : Bouton-radio "Accélération". Sélectionner ce vecteur par Clic-Gauche.

On peut vérifier que la norme A4t est la dérivée de la norme du vecteur vitesse $\overrightarrow{V4}$:A4t = $\frac{V5 - V3}{2\Delta t}$

A4t = 6,803834 m.s^{-2} et $\frac{V5 - V3}{2\Delta t}$ = - 6,7685 m.s^{-2} , le désaccord est de 0,52%. Cette erreur est lié à la méthode et non d'origine numérique. Un pas de temps Δt plus faible améliorerait la précision.

c - Accélération normale

On sélectionne $\overrightarrow{A4t}$ par Clic-Gauche, on obtient son opposé par Clic-Droit qu'on sélectionne par Clic-Gauche et on le reporte à l'extrémité de $\overrightarrow{A4}$ par Maj-Clic-Gauche. On sélectionne $\overrightarrow{A4}$ par Clic-Gauche et on ajoute $-\overrightarrow{A4t}$ par Maj-Clic-Gauche. On obtient l'accélération normale $\overrightarrow{A4n}$ qu'on sélectionne par Clic-Gauche. On lit sa norme : A4n = 7,067102 m.s^{-2} .

On peut alors calculer le rayon de courbure R de la trajectoire au point P4 :

$$R = \frac{V4^2}{A4n} = \frac{2{,}776244^2}{7{,}067102} = 1{,}090621\ m$$

Pour tracer le centre de courbure C au point P4, on sélectionne par Clic-Gauche un vecteur issu de P4 dans la direction de C, par exemple $\overrightarrow{A4n}$. Cliquer sur le bouton-radio "Tous", puis Ctrl-Maj-Clic-Droit. Une fenêtre ou la console Python, suivant l'environnement, permet d'entrer la distance 1,090621 en mètre, calculée plus haut.

6 - Moment cinétique par rapport à un point S

On utilise la relation entre la valeur du moment cinétique σ_S au point P4 par rapport à un point S et la vitesse orthoradiale V4ortho au point P4, la direction radiale étant de P4 vers S.

$$\sigma_S = m \cdot r \cdot V4ortho$$

où r est la distance entre S et P4 (coordonnée radiale depuis S).

Dans l'ordre, on place le point S, on détermine r et on construit par projection V4radial et V4ortho.

Pour placer S à partir de ses coordonnées x et y : sélectionner un point quelconque par Clic-Gauche. Bouton-radio "Tous" puis Ctrl-Maj-Clic-Gauche. Des fenêtres ou la console Python s'ouvrent et on entre les valeurs de x et y. Dans cet exemple x = 1,1 et y = 1,3 sont les coordonnées de S.

Pour déterminer la distance r , on construit le vecteur déplacement entre P4 et S : Clic-Gauche sur P4 puis Maj-Clic-Gauche sur S. Sélectionner ce vecteur par Clic-Gauche. Sa longueur est indiquée : r = 0,71902 m.

On construit $\overrightarrow{V4radial}$ en projetant $\overrightarrow{V4}$ sur le rayon-vecteur $\overrightarrow{P4\ S}$: sélection de $\overrightarrow{P4\ S}$ par Clic-Gauche puis Ctrl-Maj-Clic-Gauche sur $\overrightarrow{V4}$ reporté au point P4.

$\overrightarrow{V4ortho}$ est obtenu par $\overrightarrow{V4ortho} = \overrightarrow{V4} - \overrightarrow{V4radial}$: Bouton-radio "Vitesse" (pour ne sélectionner qu'un vecteur vitesse), sélection de $\overrightarrow{V4radial}$ par Clic-Gauche, Clic-Droit pour obtenir son opposé. Sélection de l'opposé par Clic-Gauche. Report à l'extrémité de $\overrightarrow{V4}$ par Maj-Clic-Gauche. Sélection de $\overrightarrow{V4}$ par Clic-Gauche et somme par Maj-Clic-Gauche sur $-\overrightarrow{V4radial}$. Sélection du résultat $\overrightarrow{V4ortho}$ par Clic-Gauche et on voit sa valeur : V4ortho = 2,470903 m.s^{-1} .

On en déduit $\sigma_S = 0{,}3kg \times 0{,}71902m \times 2{,}470903m.s^{-1} = 0{,}532998kg.m^2.s^{-1}$ au point P4.

On trouve de même au point P6 :

$\sigma_S = 0{,}3kg \times 0{,}63053m \times 2{,}071457m.s^{-1} = 0{,}391835kg.m^2.s^{-1}$

7 - Moment d'une force par rapport à un point

La valeur M_S du moment d'une force $\overrightarrow{F}$ au point P5 par rapport au point S définit plus haut, de coordonnées x = 1,1 m et y = 1,3 m, peut être calculée par :

$M_S = r \cdot Fortho$

où $\overrightarrow{Fortho}$ est la composante orthoradiale de la force $\overrightarrow{F}$, la direction radiale étant celle de P5 vers S.

On obtient r au point P5 en construisant le vecteur déplacement entre P5 et S : Clic-Gauche sur P5 et Maj-Clic-Gauche sur S. Clic-Gauche sur ce vecteur pour avoir sa longueur $r = 0{,}672085m$.

On obtient $\overrightarrow{Fortho}$ par : $\overrightarrow{Fortho} = \overrightarrow{F} - \overrightarrow{Fradial}$.

$\overrightarrow{Fradial}$ est obtenue par projection sur le rayon vecteur en P5 : Clic-Gauche sur le rayon-vecteur et Ctrl-Maj-Clic-Gauche sur $\overrightarrow{F}$. Bouton-radio "Force" (pour ne sélectionner qu'un vecteur force), Clic-Gauche sur $\overrightarrow{Fradial}$ puis Clic-Droit pour avoir son opposé. Clic-Gauche sur $-\overrightarrow{Fradial}$ et Maj-Clic-Gauche sur l'extrémité de $\overrightarrow{F}$ pour le reporter.

Clic-Gauche sur $\overrightarrow{F}$, Maj-Clic-Gauche sur $-\overrightarrow{Fradial}$ pour avoir $\overrightarrow{Fortho}$. Clic-Gauche sur $\overrightarrow{Fortho}$ pour avoir sa norme : Fortho = 2,627343 N.

On trouve enfin : $M_S = r \cdot Fortho = 0{,}672085m \times 2{,}627343N = 1{,}765797N.m$

8 - Théorème du moment cinétique

On vérifie ce théorème au point P5 :

$$\frac{d\overrightarrow{\sigma_S}}{dt} = \overrightarrow{M_S}$$

ce qui se traduit ici par :

$$\frac{d\overrightarrow{\sigma_S}}{dt} = \frac{\overrightarrow{\sigma 6_S} - \overrightarrow{\sigma 4_S}}{2\Delta t} = \frac{0{,}391835 - 0{,}532999}{0,08} = -1{,}764551kg.m^2.s^{-2}$$

ce qui est également la valeur trouvée pour le moment M_S au paragraphe précédent (écart relatif de 0,071%).

9 - Cas d'une force centrale

Lorsque le point matériel est soumis à une force dirigée à tout instant vers un point fixe S, le moment de cette force par rapport au point S est nul. La dérivée du moment cinétique du point matériel par rapport à S est donc nulle et ce moment cinétique est constant. Le produit $r \cdot Vortho$ est donc constant et l'aire du triangle rectangle de base r et de hauteur $Vortho \cdot \Delta t$ est constante. Intégré (ou sommé) sur une durée finie, ceci donne la loi des aires ou 2ème loi de Kepler pour le mouvement des planètes autour du Soleil, les planètes étant soumises à la force gravitationnelle, dirigée en permanence vers le centre du Soleil.

On peut le vérifier sur une trajectoire elliptique obtenue en réduisant la vitesse initiale de la Terre dans son mouvement autour du Soleil (mecalab_05_terre_soleil_02_polaire_ellipse.py).

On construit le vecteur Vortho et le vecteur déplacement entre la position de la Terre et le Soleil aux points P7 et P25. On trouve au point P7 : Vortho = 21863,54 $m.s^{-1}$ et r = 137,0255 . 10^6 km. On trouve au point P25 : Vortho = 38554,63 $m.s^{-1}$ et r = 77,1968 . 10^6 km

On obtient un produit $r \cdot Vortho$ qui vaut 2,995863 . 10^{15} $m^2.s^{-1}$ au point P7 et 2,9765 . 10^{15} $m^2.s^{-1}$ au point P25, soit un écart relatif de 0,65 %. La vitesse de la Terre est respectivement de 23806 $m.s^{-1}$ et 45418 $m.s^{-1}$ en ces deux points, soit une variation relative de 91 %. A l'erreur de méthode près liée au pas de temps fini, on peut conclure que le moment cinétique de la Terre par rapport au Soleil est constant dans ce mouvement elliptique hypothétique, dans lequel la vitesse de la Terre varie de façon notable.