Etude de l'impact des conditions initiales sur le mouvement d'un point matériel dans le champ de pesanteur
- TP -

Les simulations proposées permettent d'illustrer les points suivants :

1 - La modification de la position initiale de l'objet, définie par x0 et y0, a pour effet de translater la trajectoire "en bloc". On s'intéressera, en particulier, à la position M_{15} de l'objet et à sa vitesse en ce point, lorsque la position initiale varie (position à l'instant $t_{15} = 0.6$ s = 15 Δt avec $\Delta t = 0.04$ s).

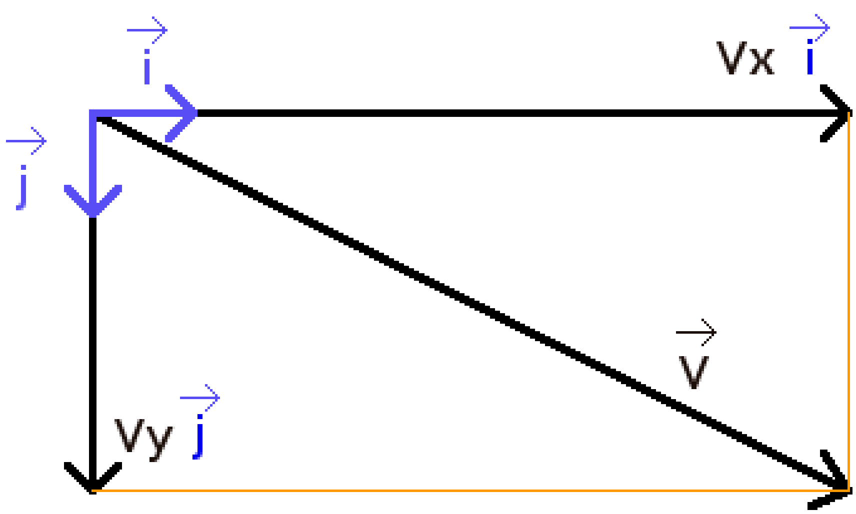
2 - La vitesse $\vec{V}$ d'un point matériel est une grandeur vectorielle, et elle peut être projetée suivant 2 axes Ox et Oy, portant des vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$:

$$\vec{V} = Vx\ \vec{i} + Vy\ \vec{j}$$

Vx est la composante horizontale de la vitesse et Vy est sa composante verticale. La valeur du vecteur vitesse $\vec{V}$ est alors donnée par :

$$\|\vec{V}\| = V = \sqrt{Vx^2 + Vy^2}$$

On peut voir cette relation comme une conséquence du théorème de Pythagore.



3 - L'évolution de la composante Vx de la vitesse est indépendante de l'évolution de la composante Vy. On considère le cas d'un point matériel de masse m soumis à son poids $\vec{P}=m\times\vec{g}$ avec $\vec{g}=g\times\vec{j}$, où g = 9.81 m.s^{-2} est l'intensité de la pesanteur (c'est également l'accélération du point matériel), $\vec{g}$ est dirigé verticalement vers le bas, donc suivant $\vec{j}$ et $\vec{g}$ va faire évoluer Vy. Comme l'accélération $\vec{g}$ est constante, on s'attend à ce que :

$$Vy(t) = v0y + g . t$$

où v0y est la composante verticale de la vitesse initiale. La valeur de la composante Vy de la vitesse doit donc être une fonction affine du temps t.

La composante suivant $\vec{i}$ de $\vec{g}$ étant nulle, on s'attend à ce que :

$$Vx(t) = v0x + (0 . t) = v0x = \text{Constante.}$$

où v0x est la composante suivant $\vec{i}$ de la vitesse initiale.

Les simulations utilisent le module mecalab_05_poids_01_cartesienne.py (ou sa version JupyterLab) , qui peut être téléchargé à la page : http://www.tuclic.fr/python_phy/mecalab/index.htm.

1 - Etude de l'impact de la position initiale

Les conditions initiales sont la position initiale (x0 , y0) et la vitesse initiale (v0x , v0y).

On va modifier la position initiale x0 , y0 lignes 585 et 586 en fixant la vitesse initiale v0x = 1.5 , v0y = -3.5 lignes 587 et 588. Les valeurs de x0 et y0 à tester sont indiquées dans le tableau ci-dessous, qui prévoit d'indiquer les coordonnées x , y du point M_{15}, la vitesse V_{15} en M_{15} (à l'instant $t_{15} = 15 * \Delta t = 15 * 0.04$ s = 0.6 s), et les composantes X , Y du vecteur $\overrightarrow{M_0 M_{15}}$:

x0	0.1	0.5	1.0	0.1	1.0	0.1
y0	1.2	1.2	1.2	1.75	1.0	1.9
x						
y						
X = x - x0						
Y = y - y0						
V_{15}						

Que peut-on dire du vecteur $\overrightarrow{M_0 M_{15}}$ pour chacune de ces 6 simulations ?

Que peut on dire de V_{15} pour ces 6 simulations ?

2 - Etude de l'impact de la vitesse initiale

Les conditions initiales sont la position initiale (x0 , y0) et la vitesse initiale (v0x , v0y).

On fixe ici x0 = 0.1 et y0 = 1.5, lignes 585 et 586.

a - Modification de v0x

On fixe v0y = -3.5 ligne 588 et on fait varier v0x comme indiqué dans le tableau ci-dessous (ligne 587) . On s'intéresse à la position du point M_{15} caractérisé par ses coordonnées x , y et à la vitesse V_{15} en ce point.

v0x	1.5	2.0	2.5	3.0	1.0	0.0
v0y	- 3.5	- 3.5	- 3.5	- 3.5	- 3.5	- 3.5
x						
y						
V_{15}						

La dernière valeur v0x = 0.0 est plus délicate à étudier. Dans certains cas, il n'est pas possible d'exploiter la simulation.

Vérifier que dans tous les cas :

$$x - x0 = v0x * 15 * \Delta t = v0x * 0.6 \text{ s}$$

Le déplacement horizontal du point M entre les instants t_0 et t_{15} ne dépend que de la composante horizontale de la vitesse, qui reste constante et égale à v0x (valeur initiale). On peut ainsi "isoler" le mouvement horizontal du mouvement vertical.

Que peut-on dire de la coordonnée y du point M_{15} dans ces 6 simulations ? Est-ce cohérent avec le fait que la composante verticale de la vitesse initiale v0y (suivant Oy) et la composante verticale de l'accélération g sont les mêmes pour les 6 simulations ?

La valeur V_{15} = VVy dans le dernier cas v0x = 0 est très intéressante : il s'agit de la composante verticale Vy_{15} de la vitesse à l'instant t_{15} = 0.6 s, puisque la composante horizontale v0x est nulle. On va vérifier que l'hypothèse suivante ne comporte pas de contradiction :

La vitesse V_{15} du point matériel a une composante horizontale Vx_{15} = v0x constante pendant chaque simulation et une composante Vy_{15} =VVy qui est identique pour les 6 simulations du tableau ci-dessus, compte tenu de la condition initiale v0y = - 3.5 dans tous les cas. On doit donc avoir pour ces 6 simulations :

$$V_{15} = \sqrt{VVy^2 + v0x^2}$$

où VVy est la valeur particulière de V_{15} dans le cas v0x = 0 et les deux autres variables V_{15} et v0x sont indiquées dans le tableau pour chacune des 6 simulations.

Cette vérification, qu'il est nécessaire d'effectuer, est cohérente avec l'indépendance du mouvement horizontal suivant Ox et du mouvement vertical suivant Oy, du point de vue du déplacement, de la vitesse et de l'accélération.

b - Modification de v0y

On fixe v0x = 2.0   ligne 587 et on fait varier v0y comme indiqué dans le tableau ci-dessous (ligne 588). On a, comme précédemment : x0 = 0.1 et y0 = 1.5, lignes 586 et 587.

On s'intéresse à la position du point M_{15} caractérisé par ses coordonnées x , y et à la vitesse V_{15} en ce point.

v0x	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0
v0y	- 3.5	- 4.0	- 4.5	- 5.0	- 5.5	- 3.0
x						
y						
V_{15}						

Que peut-on dire de la valeur x, abscisse du point M_{15} ? Est-ce cohérent avec la condition initiale v0x = 2.0 pour les 6 simulations ? Le justifier par un calcul :

$$x - x0 = v0x * 15 * \Delta t.$$

La relation :

$$V_{15} = \sqrt{Vx^2 + Vy^2}$$

soit l'expression de la norme du vecteur vitesse en fonction de ses composantes horizontale Vx et verticale Vy, est équivalente à :

$$Vy = \sqrt{V_{15}^2 - Vx^2}$$

Compléter le tableau suivant à partir de cette égalité :

v0y	- 3.0	- 3.5	- 4.0	- 4.5	- 5.0	- 5.5
V_{15}						
Vx = v0x	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0
$Vy = \sqrt{V_{15}^2 - Vx^2}$						
v0y + g * 15 * Δt = v0y + 9.81 * 0.6 s						

Quel écart relatif y a-t-il entre les éléments des 2 dernières lignes du tableau ?

Rappel : écart relatif entre 2 valeurs A et B :

$$Ecart\, relatif = \frac{B - A}{A}$$

Montrer que ceci est cohérent avec l'évolution de la vitesse Vy(t) lorsque l'accélération g est constante :

Vy(t) = v0y + g * (t - t0)

où t0 est l'instant initial (pris à 0 dans ces simulations).

Pourquoi ne trouve-t-on pas un écart relatif rigoureusement nul ?