Etude de l'impact des conditions initiales sur le mouvement d'un point matériel dans le champ de pesanteur
- TP -

Les simulations proposées permettent d'illustrer les points suivants :

1 - La modification de la position initiale de l'objet, définie par x0 et y0, a pour effet de translater la trajectoire "en bloc". On s'intéressera, en particulier, à la position M_{15} de l'objet et à sa vitesse en ce point, lorsque la position initiale varie (position à l'instant $t_{15} = 0.6$ s = 15 Δt avec $\Delta t = 0.04$ s).

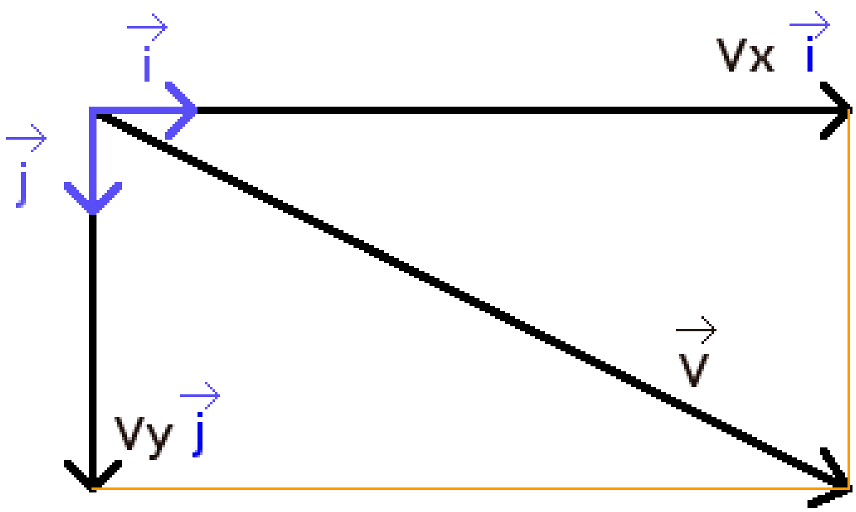
2 - La vitesse $\vec{V}$ d'un point matériel est une grandeur vectorielle, et elle peut être projetée suivant 2 axes Ox et Oy, portant des vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$:

$$\vec{V} = Vx \ \vec{i} + Vy \ \vec{j}$$

Vx est la composante horizontale de la vitesse et Vy est sa composante verticale. La valeur du vecteur vitesse $\vec{V}$ est alors donnée par :

$$\|\vec{V}\| = V = \sqrt{Vx^2 + Vy^2}$$

On peut voir cette relation comme une conséquence du théorème de Pythagore.



3 - L'évolution de la composante Vx de la vitesse est indépendante de l'évolution de la composante Vy. On considère le cas d'un point matériel de masse m soumis à son poids $\vec{P}=m\times\vec{g}$ avec $\vec{g}=g\times\vec{j}$, où g = 9.81 m.s^{-2} est l'intensité de la pesanteur (c'est également l'accélération du point matériel), $\vec{g}$ est dirigé verticalement vers le bas, donc suivant $\vec{j}$ et $\vec{g}$ va faire évoluer Vy. Comme l'accélération $\vec{g}$ est constante, on s'attend à ce que :

Vy(t) = v0y + g . t

où v0y est la composante verticale de la vitesse initiale. La valeur de la composante Vy de la vitesse doit donc être une fonction affine du temps t.

La composante suivant $\vec{i}$ de $\vec{g}$ étant nulle, on s'attend à ce que :

Vx(t) = v0x + (0 . t) = v0x = Constante.

où v0x est la composante suivant $\vec{i}$ de la vitesse initiale.

Les simulations nécessitent de modifier la façon dont sont entrées les conditions initiales de position et de vitesse dans mecalab_01_poids_01b.py, (ou mecalab_poids_jupyter_01.ipynb dans sa version JupyterLab), qui peut être téléchargé à la page : http://www.tuclic.fr/python_phy/mecalab/index.htm.

Ces modifications sont indiquées dans le paragraphe 1 et les simulations sont présentées dans les paragraphes 2 et 3.

1 - Modifications du programme Python Mecalab : mecalab_01_poids_01b.py

Les conditions initiales sont la position initiale (x0 , y0) et la vitesse initiale (v0x , v0y).

Dans ce cas les valeurs L, alpha0, v0r et v0al en coordonnées polaires ne sont pas les mieux adaptées.

On va donc modifier le fichier mecalab_01_poids_01b.py et le renommer tout de suite :

mecalab_01_poids_02.py

Dans l'état actuel, la position initiale est calculée lignes 456 et 457 :

```
x0 = x2 + L*sin(angle)
y0 = y2 + L*cos(angle)
```

---> mettre en commentaire ces 2 lignes en les faisant précéder d'un dièse # :

```
#  x0 = x2 + L*sin(angle)
#  y0 = y2 + L*cos(angle)
```

De cette façon, ces 2 lignes ne seront pas exécutées (x2 et y2 sont les coordonnées du centre de la fenêtre, "angle" l'angle par rapport à la verticale en direction du point matériel depuis le centre de la fenêtre et L la distance initiale entre le point matériel M et le centre de la fenêtre).

Il est nécessaire d'initialiser x0 et y0. Pour garder une position voisine dans la fenêtre, on a x0 = 0.1 m et y0 = 1.2 m.

---> Mettre en commentaire les lignes 406 et 407 (initialisation L = 0.9 m et angle = - 75 degrés).
---> Ajouter 2 lignes après la ligne 410 :

```
x0 = 0.1      # abscisse initiale en mètre
y0 = 1.2      # ordonnée initiale en mètre
```

Rappel : l'origine est en haut à gauche de la fenêtre qui mesure 2 m par 2 m, soit 800 pixels par 800 pixels (ces valeurs peuvent être modifiées).

La vitesse initiale est actuellement définie par vr0 = -2.5 et val0 = -3 en coordonnées polaires (vitesse radiale et vitesse orthoradiale). Les valeurs de v0x et v0y en coordonnées cartésiennes sont déduites lignes 460 et 461 :

```
v0x = vr0 * sin(angle) + val0 * cos(angle)
v0y = vr0 * cos(angle) - val0 * sin(angle)
```

---> Mettre en commentaires avec des # ces 2 lignes où v0x et v0y sont calculées :

```
#   v0x = vr0 * sin(angle) + val0 * cos(angle)
#   v0y = vr0 * cos(angle) - val0 * sin(angle)
```

Il est nécessaire d'initialiser v0x et v0y. On le fait en ajoutant 2 lignes après la ligne 411 :

```
v0x = 1.5       # vitesse initiale suivant x en m/s
v0y = - 3.5     # vitesse initiale suivant y en m/s
```

---> Mettre en commentaire la ligne 457 :

angle = angle * pi / 180 (conversion des degrés en radians qui ne sert plus et provoquerait une erreur)

---> Modifier les lignes 472 et 473 :

```
cosalpha0 = (y0 - y2)/d0
sinalpha0 = (x0 - x2) /d0
```

par :

```
cosalpha0 = 1
sinalpha0 = 0
```

pour éviter une erreur lorsque d0 = 0.

---> Enregistrer le fichier mecalab_01_poids_02.py

On obtient une position initiale et une vitesse initiale très voisines de celles de mecalab_01_poids_01b.py.

2 - Etude de l'impact de la position initiale

Les conditions initiales sont la position initiale (x0 , y0) et la vitesse initiale (v0x , v0y).

On va modifier la position initiale x0 , y0 lignes 410 et 411 en conservant la vitesse initiale v0x = 1.5 , v0y = -3.5 lignes 412 et 413. Les valeurs de x0 et y0 à tester sont indiquées dans le tableau ci-dessous, qui prévoit d'indiquer les coordonnées x , y du point M_{15}, la vitesse V_{15} en M_{15} (à l'instant $t_{15} = 15 * \Delta t = 15 * 0.04$ s = 0.6 s), et les composantes X , Y du vecteur $\overrightarrow{M_0 M_{15}}$:

x0	0.1	0.5	1.0	0.1	1.0	0.1
y0	1.2	1.2	1.2	1.75	1.0	1.9
x						
y						
X = x - x0						
Y = y - y0						
V_{15}						

Que peut-on dire du vecteur $\overrightarrow{M_0 M_{15}}$?
Que peut on dire de V_{15} ?

2 - Etude de l'impact de la vitesse initiale

Les conditions initiales sont la position initiale (x0 , y0) et la vitesse initiale (v0x , v0y).

On fixe ici x0 = 0.1 et y0 = 1.5, lignes 410 et 411.

a - Modification de v0x

On fixe v0y = -3.5 ligne 413 et on fait varier v0x comme indiqué dans le tableau ci-dessous (ligne 412) . On s'intéresse à la position du point M_{15} caractérisé par ses coordonnées x , y et à la vitesse V_{15} en ce point.

v0x	1.5	2.0	2.5	3.0	1.0	0.0
v0y	- 3.5	- 3.5	- 3.5	- 3.5	- 3.5	- 3.5
x						
y						
V_{15}						

La dernière valeur v0x = 0.0 est plus délicate à étudier. Dans certains cas, il n'est pas possible d'exploiter la simulation.

Vérifier que dans tous les cas :

$$x - x0 = v0x * 15 * \Delta t = v0x * 0.6 \text{ s}$$

Le déplacement horizontal du point M entre les instants t_0 et t_{15} ne dépend que de la composante horizontale de la vitesse, qui reste constante et égale à v0x (valeur initiale). On peut ainsi "isoler" le mouvement horizontal du mouvement vertical.

Que peut-on dire de la coordonnée y du point M_{15} dans ces 6 simulations ? Est-ce cohérent avec le fait que la composante verticale de la vitesse initiale v0y (suivant Oy) et la composante verticale de l'accélération g sont les mêmes pour les 6 simulations ?

La valeur V_{15} = VVy dans le dernier cas v0x = 0 est très intéressante : il s'agit de la composante verticale Vy_{15} de la vitesse à l'instant t_{15} = 0.6 s, puisque la composante horizontale v0x est nulle. On va vérifier que l'hypothèse suivante ne comporte pas de contradiction :

La vitesse V_{15} du point matériel a une composante horizontale Vx_{15} = v0x constante pendant chaque simulation et une composante Vy_{15} =VVy qui est identique pour les 6 simulations du tableau ci-dessus, compte tenu de la condition initiale v0y = - 3.5 dans tous les cas. On doit donc avoir pour ces 6 simulations :

$$V_{15} = \sqrt{VVy^2 + v0x^2}$$

où VVy est la valeur particulière de V_{15} dans le cas v0x = 0 et les deux autres variables V_{15} et v0x sont indiquées dans le tableau pour chacune des 6 simulations.

Cette vérification, qu'il est nécessaire d'effectuer, est cohérente avec l'indépendance du mouvement horizontal suivant Ox et du mouvement vertical suivant Oy, du point de vue du déplacement, de la vitesse et de l'accélération.

b - Modification de v0y

On fixe v0x = 2.0   ligne 412 et on fait varier v0y comme indiqué dans le tableau ci-dessous (ligne 413). On a, comme précédemment : x0 = 0.1 et y0 = 1.5, lignes 410 et 411.

On s'intéresse à la position du point M_{15} caractérisé par ses coordonnées x , y et à la vitesse V_{15} en ce point.

v0x	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0
v0y	- 3.5	- 4.0	- 4.5	- 5.0	- 5.5	- 3.0
x						
y						
V_{15}						

Que peut-on dire de la valeur x, abscisse du point M_{15} ? Est-ce cohérent avec la condition initiale v0x = 2.0 pour les 6 simulations ? Le justifier par un calcul :

$$x - x0 = v0x * 15 * \Delta t.$$

La relation :

$$V_{15} = \sqrt{Vx^2 + Vy^2}$$

soit l'expression de la norme du vecteur vitesse en fonction de ses composantes horizontale Vx et verticale Vy, est équivalente à :

$$Vy = \sqrt{V_{15}^2 - Vx^2}$$

Compléter le tableau suivant à partir de cette égalité :

v0y	- 3.0	- 3.5	- 4.0	- 4.5	- 5.0	- 5.5
V_{15}						
Vx = v0x	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0
$Vy=\sqrt{V_{15}^2-Vx^2}$						
v0y + g * 15 * Δt = v0y + 9.81 * 0.6 s						

Quel écart relatif y a-t-il entre les éléments des 2 dernières lignes du tableau ?

Rappel : écart relatif entre 2 valeurs A et B :

$$Ecart\,relatif=\frac{B-A}{A}$$

Montrer que ceci est cohérent avec l'évolution de la vitesse Vy(t) lorsque l'accélération g est constante :

Vy(t) = v0y + g * (t - t0)

où t0 est l'instant initial (pris à 0 dans ces simulations).

Pourquoi ne trouve-t-on pas un écart relatif rigoureusement nul ?