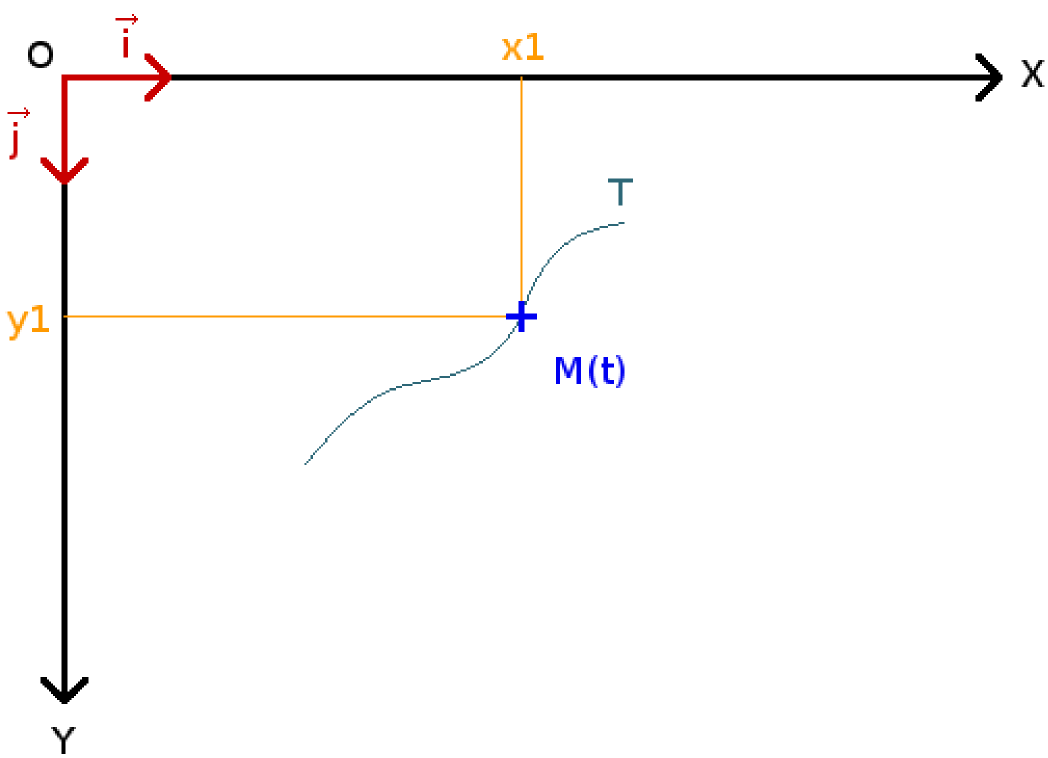
Exemple de traitement
Calculs effectués par Mécalab

Les notions utiles sont précisées et illustrées en 5 étapes par des applications avec une simulation Mécalab. Les calculs effectués par Mécalab sont décrits au paragraphe 4.

1 - Position et vitesse d'un point matériel M

Un point matériel M(t) de masse "masse" est repéré par ses coordonnées x_1 et y_1 dans le repère : (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).



L'origine O est en haut à gauche de la fenêtre, $\vec{i}$ et OX vers la droite, $\vec{j}$ et OY vers le bas.

Le point matériel M(t) décrit une trajectoire T dans le repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$). On peut également dire que la position du point M(t) est caractérisée par le vecteur $\overrightarrow{OM(t)}$ de coordonnées x_1 et y_1.

La vitesse moyenne entre 2 instants t_1 et t_2 est :

$$\vec{V}=\frac{\overrightarrow{M(t_1)M(t_2)}}{t_2-t_1}$$

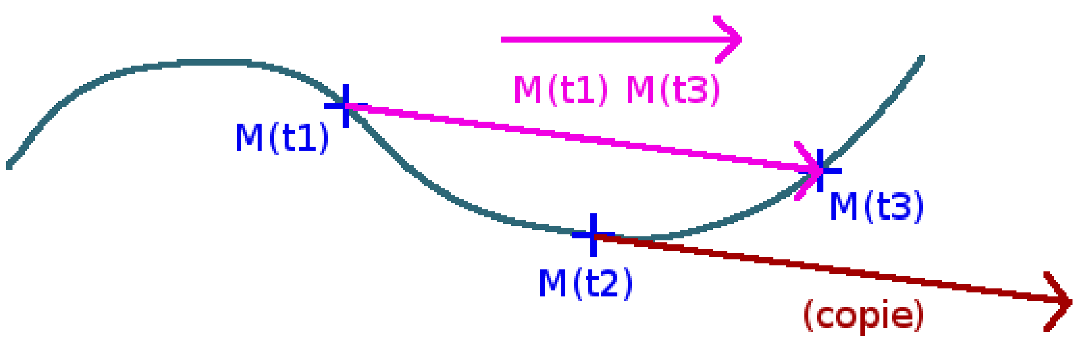
On considère dans ce qui suit des positions $M(t_i)$, $M(t_{i+1})$, $M(t_{i+2})$, etc ..., telles que l'intervalle de temps $t_{i+1} - t_i = \Delta t$ est constant. La lettre grecque Δ indique souvent une différence ou une variation.

Plus le déplacement est grand pendant la durée Δt, plus la vitesse V est grande. Le vecteur $\vec{V}$ a la même direction que le vecteur déplacement $\overrightarrow{M(t_i)M(t_{i+1})}$.

Une bonne approximation de la vitesse instantanée $\overrightarrow{V(t_2)}$ à l'instant t_2 est :

$$\overrightarrow{V(t_2)}\simeq\frac{\overrightarrow{M(t_1)M(t_3)}}{t_3-t_1}$$

où le vecteur déplacement $\overrightarrow{M(t_1)M(t_3)}$ correspond à 2 pas de temps Δt puisqu'il s'écoule la durée $\Delta t = t_2 - t_1$ entre les positions $M(t_1)$ et $M(t_2)$, et à nouveau $\Delta t = t_3 - t_2$ entre les positions $M(t_2)$ et $M(t_3)$.



Le vecteur $\overrightarrow{M(t_1)M(t_3)}$ a été "recopié" sur une nouvelle origine M(t_2). On obtient à partir de ce vecteur une approximation de la vitesse $\overrightarrow{V(t_2)}$ tangente à la trajectoire et qui moyenne sur deux pas de temps l'effet d'une "accélération" du point M.

On a donc :

$$\overrightarrow{V(t_2)} \simeq \frac{\overrightarrow{M(t_1)M(t_3)}}{2\times\Delta t}$$

Pour cette raison, dans Mécalab, nbv = "Nb pas vitesse" est proposé à 2 par défaut (2 pas de temps Δt pour calculer $\overrightarrow{V(t_2)}$). Si on veut calculer la vitesse à partir du déplacement $\overrightarrow{M(t_1)M(t_2)}$, il faut changer ce nombre et mettre 1 à la place de 2 pour "Nb pas vitesse" :

$$\overrightarrow{V(t_2)} \simeq \frac{\overrightarrow{M(t_1)M(t_2)}}{\Delta t}$$

Il est cependant conseillé de laisser 2 et d'utiliser la méthode à 2 pas de temps pour estimer $\overrightarrow{V(t_2)}$ à l'instant t_2.

Application : étape 1, construction du vecteur déplacement avec Mécalab.

a - Lancer une simulation Mécalab (voir feuille "Simulation avec Mécalab"). La flèche verte dans les barres de menu de Edupython permet de faire exécuter le module Python ouvert.

b - Choisir un point M_i marqué d'une croix rouge sur la trajectoire et le sélectionner par Clic-Gauche. Sa couleur devient verte. Noter ses coordonnées qui apparaissent dans la partie droite de la fenêtre, ainsi que l'instant :

Point sélectionné : instant t = t_i (noter la valeur de l'instant t_i)
Point sélectionné : x = x_i , y = y_i (noter les valeurs x_i et y_i des coordonnées du point M_i)

c - Compter 2 intervalles de temps Δt (en sautant donc le point M_{i+1}) et Majuscule-Clic-Gauche sur le point M_{i+2}. Le vecteur déplacement $\overrightarrow{M_iM_{i+2}}$ apparaît alors, de couleur magenta.

d - Sélectionner le point M_{i+2} (extrémité du vecteur déplacement) par Clic-Gauche sur ce point. Noter ses coordonnées et l'instant :

Point sélectionné : instant t = t_{i+2} (noter la valeur de l'instant t_{i+2})
Point sélectionné : x = x_{i+2} , y = y_{i+2} (noter les valeurs x_{i+2} et y_{i+2} des coordonnées du point M_{i+2})

e - Sélectionner le vecteur déplacement $\overrightarrow{M_i M_{i+2}}$ par Clic-Gauche vers le milieu de ce vecteur. Il apparaît alors en vert.

f - Noter la longueur du vecteur déplacement dans la partie droite de la fenêtre :

Vecteur déplacement = d (noter la valeur de d)

g - Vérifier par un calcul manuel avec une calculatrice, que les valeurs données par Mécalab sont telles que :

$$d=\sqrt{(x_{i+2}-x_i)^2+(y_{i+2}-y_i)^2}$$

soit que d est égale à la norme du vecteur $\overrightarrow{M_i M_{i+2}}$ c'est à dire sa longueur (livre de maths Transmath 2nde p 94 définition 4 et p 102 théorème 6) :

$$d=\|\overrightarrow{M_i M_{i+2}}\|$$

Application : étape 2, construction du vecteur vitesse avec Mécalab.

a - Clic-Gauche sur sur le vecteur déplacement construit dans l' "étape 1" pour le sélectionner (on peut utiliser le "bouton radio" "Déplacement" si on veut sélectionner uniquement des vecteurs déplacement lorsque la figure est très chargée. Sinon, laisser coché "tous"). Le vecteur déplacement $\overrightarrow{M_i M_{i+2}}$ est alors de couleur verte.

b - Cliquer sur le bouton "Déplacement --> Vitesse". Le vecteur déplacement $\overrightarrow{M_i M_{i+2}}$ est alors effacé et le vecteur vitesse

$$\overrightarrow{V(t_{i+1})}=\frac{\overrightarrow{M_i M_{i+2}}}{2\times\Delta t}$$

est alors calculé en prenant en compte la valeur nbv = "Nb pas vitesse" qui doit être égale à 2. Le vecteur vitesse, colinéaire à $\overrightarrow{M_i M_{i+2}}$ (c'est à dire de même direction) est tracé de couleur "saumon", avec pour origine le point M_i.

c - Sélectionner par Clic-Gauche le vecteur vitesse $\overrightarrow{V(t_{i+1})}$. Il devient vert. Noter sa valeur qui apparaît dans la fenêtre de droite :

Vecteur Vitesse = V_1 (noter la valeur V_1)

d - Vérifier avec une calculatrice que :

$$V(t_{i+1})=\frac{d}{2\times\Delta t}$$

soit :

$$V(t_{i+1})=\frac{d}{(t_{i+2}-t_i)}$$

(Rappel : $d=\|\overrightarrow{M_i M_{i+2}}\|$ = distance entre les points M_i et M_{i+2})

2 - Accélération du point matériel M

D'après le Principe d'Inertie (première loi de Newton), dans un référentiel galiléen (le référentiel terrestre convient pour une chute parabolique sous l'effet du poids), un point matériel M soumis à une force nulle (ou à des forces qui se compensent, c'est à dire dont la somme vectorielle est nulle) est soit immobile, soit a une vitesse constante en direction et en valeur :

$$\vec{V}=\overrightarrow{Constante}$$

Si les forces ne se compensent pas, la vitesse $\vec{V}$ évolue en direction ou en valeur (ou les 2) entre 2 instants t_i et t_{i+1}. L'accélération $\vec{a}$ du point matériel caractérise cette évolution de la vitesse :

$\vec{a}=\vec{0}$ équivaut à : la vitesse $\vec{V}$ est constante

$\vec{a}\neq\vec{0}$ équivaut à : la vitesse $\vec{V}$ varie

Une bonne approximation de l'accélération $\overrightarrow{a(t_{i+2})}$ du point M à l'instant t_{i+2} est :

$$\overrightarrow{a(t_{i+2})}\simeq\frac{\overrightarrow{V(t_{i+3})}-\overrightarrow{V(t_{i+1})}}{t_{i+3}-t_{i+1}}$$

où le numérateur est la "variation de vitesse" entre les instants t_{i+1} et t_{i+3}. Le dénominateur est la durée :

$(t_{i+3} - t_{i+1}) = 2 * \Delta t$ (valeur nba = "Nb pas accélération" = 2 dans Mécalab par défaut).

L'accélération $\vec{a}$ est d'autant plus grande que la variation de vitesse est grande. L'accélération peut être décomposée en une composante tangente à la trajectoire (accélération tangentielle) qui fait varier la valeur de la vitesse $\vec{V}$ est une composante perpendiculaire (accélération normale) qui fait varier la direction de la vitesse $\vec{V}$.

Application : étape 3, construction du vecteur variation de vitesse avec Mécalab.

a - On a construit dans l'étape 2 le vecteur vitesse $\overrightarrow{V(t_{i+1})}$ à partir du vecteur déplacement $\overrightarrow{M_i M_{i+2}}$.

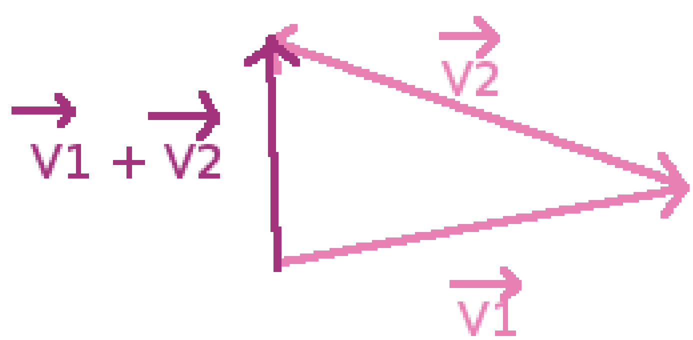
b - Construire de la même façon le vecteur vitesse $\overrightarrow{V(t_{i+3})}$ à partir du vecteur déplacement $\overrightarrow{M_{i+2} M_{i+4}}$.

c - On veut obtenir le vecteur $\overrightarrow{V(t_{i+3})} - \overrightarrow{V(t_{i+1})}$, différence de 2 vecteurs égale au vecteur "variation de vitesse". Pour cela on construit d'abord le vecteur $-\overrightarrow{V(t_{i+1})}$, opposé de $\overrightarrow{V(t_{i+1})}$, dont on fera la somme avec $\overrightarrow{V(t_{i+3})}$. Pour cela : Clic-Gauche sur $\overrightarrow{V(t_{i+1})}$ pour le sélectionner (utiliser éventuellement le bouton radio "Vitesse" pour faciliter la sélection).

Clic-Droit pour obtenir l'opposé $-\overrightarrow{V(t_{i+1})}$ du vecteur sélectionné. Majuscule-Clic-Droit permet d'effacer le vecteur sélectionné $\overrightarrow{V(t_{i+1})}$ qui est devenu inutile.

d - On veut mettre "bout à bout" $\overrightarrow{V(t_{i+3})}$ et $-\overrightarrow{V(t_{i+1})}$ pour les sommer vectoriellement. Pour cela : Clic-Gauche pour sélectionner le vecteur $-\overrightarrow{V(t_{i+1})}$ et Majuscule-Clic-Gauche sur l'extrémité de $\overrightarrow{V(t_{i+3})}$. Le vecteur $-\overrightarrow{V(t_{i+1})}$ est reporté à l'extrémité de $\overrightarrow{V(t_{i+3})}$.

e - Clic-Gauche sur $\overrightarrow{V(t_{i+3})}$ et Majuscule-Clic-Gauche sur $-\overrightarrow{V(t_{i+1})}$: on obtient la somme des 2 vecteurs.



f - Clic-Gauche pour sélectionner le vecteur "variation de vitesse" $\overrightarrow{V(t_{i+3})}-\overrightarrow{V(t_{i+1})}$. Il devient vert. Noter sa valeur qui apparait dans la fenêtre de droite :

Vecteur Vitesse = ΔV

Application : étape 4, construction du vecteur accélération avec Mécalab.

a - Le vecteur "variation de vitesse" $\overrightarrow{V(t_{i+3})}-\overrightarrow{V(t_{i+1})}$ étant sélectionné (couleur verte), vérifier que la valeur "Nb pas accélération" dans la fenêtre de Mécalab correspond au nombre de pas de temps Δt, soit 2 dans le cas (t_{i+3}) - (t_{i+1}) = 2Δt. Cliquer sur le bouton "Vitesse --> Accélération". Le vecteur accélération $\overrightarrow{a(t_{i+2})}$ est calculé avec la formule :

$$\overrightarrow{a(t_{i+2})}=\frac{\overrightarrow{V(t_{i+3})}-\overrightarrow{V(t_{i+1})}}{t_{i+3}-t_{i+1}}$$

Le vecteur accélération est tracé de couleur bleu clair. Il est colinéaire au vecteur "variation de vitesse".

b - Clic-Gauche sur le vecteur accélération pour le sélectionner (utiliser éventuellement le bouton radio "Accélération" pour faciliter sa sélection). Noter sa valeur qui apparaît dans la fenêtre de droite :

Vecteur Accélération = a

c - Vérifier avec la calculatrice que :

$$a = \Delta V / (2\ \Delta t)$$

avec la valeur ΔV de la "variation de vitesse" obtenue dans l'étape 3, f-.

3 - Vérification de la 2ème loi de Newton

Cette loi s'énonce :

$$\sum \vec{F} = masse \times \vec{a}$$

La deuxième loi de Newton relie la somme des forces $\vec{F}$ (symbole $\sum$ pour désigner la somme) et l'accélération $\vec{a}$ du point matériel. Plus les forces ont une valeur importante, plus l'accélération est grande, et plus la vitesse varie.

Plus la masse du point matériel est grande, plus les forces doivent être importantes pour accélérer d'une quantité définie la vitesse du point matériel.

Par ailleurs, la 2ème loi de Newton précise que le vecteur force $\vec{F}$ et le vecteur accélération $\vec{a}$ sont colinéaires.

Application : étape 5, vérification de la 2ème loi de Newton avec Mécalab.

a - Clic-Gauche sur le point M_{i+2} pour le sélectionner.

b - Controle-Clic-Gauche (ou Ctrl-Clic-Gauche) pour faire apparaître le vecteur force $\vec{F}$ au point M_{i+2} (couleur brune).

c - On constate que les vecteurs $\vec{F}$ et $\vec{a}$ sont colinéaires.

d - Clic-Gauche sur le vecteur force $\vec{F}$ pour le sélectionner (le bouton radio "Force" peut être utile pour faciliter cette sélection).

e - Noter la valeur du vecteur force qui apparaît dans la fenêtre de droite :

Vecteur Force = F

f - Vérifier avec la calculatrice qu'on a bien :

F = masse * a

F et a étant donnés par Mécalab, et la masse "masse" étant définie ligne 575 (ligne 410 pour la version 2) dans la procédure Python Mécalab (masse = 0.3 kg pour la trajectoire parabolique donnée en exemple, ainsi que pour le système masse - ressort. Rechercher sur internet la masse de la Terre pour le système Soleil - Terre).

4 - Calculs effectués par Mécalab

Mécalab opère dans le sens opposé de la démarche décrite ci-dessus.

a - La force $\vec{F} = Fx\ \vec{i} + Fy\ \vec{j}$ est imposée au départ, fonction des coordonnées (x_1, y_1) du point matériel M, de sa vitesse $\vec{V} = Vx\ \vec{i} + Vy\ \vec{j}$, du temps, etc ... ,

b - L'accélération $\vec{a}$ est obtenue grâce à la 2ème loi de Newton :

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{masse}$$

qui donne les 2 composantes de l'accélération ax et ay :

$$\vec{a} = ax \ \vec{i} + ay \ \vec{j}$$

soit :

$$ax = \frac{Fx}{masse} \quad \text{et} \quad ay = \frac{Fy}{masse}$$

c - La vitesse est obtenue à partir de $\vec{a}$:

$$\overrightarrow{V(t_{i+3})} = \overrightarrow{V(t_{i+1})} + (2 \times \Delta t \times \vec{a})$$

soit :

$$Vx(t_{i+3}) = Vx(t_{i+1}) + 2 * \Delta t * ax$$

et :

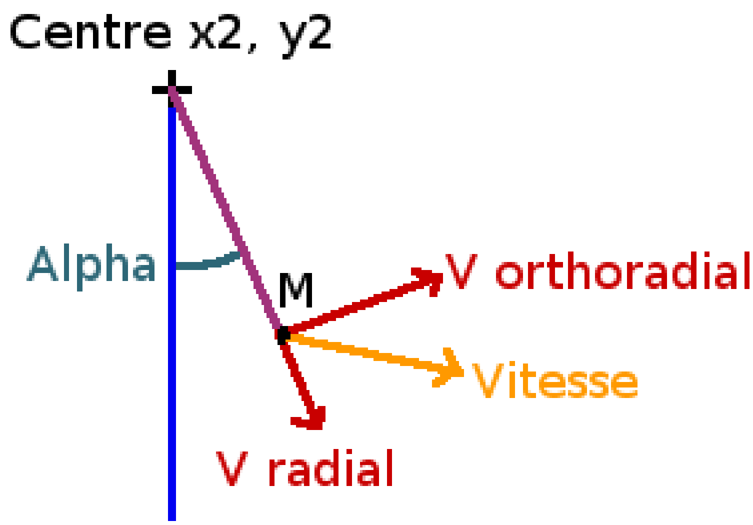
$$Vy(t_{i+3}) = Vy(t_{i+1}) + 2 * \Delta t * ay$$

d - On obtient donc la vitesse à un instant t_{i+3} à partir de la vitesse à un instant antérieur t_{i+1}. Il est donc nécessaire d'indiquer la valeur initiale de la vitesse pour débuter le calcul :

$$\overrightarrow{V(t_0)} = V0x \ \vec{i} + V0y \ \vec{j}$$

soit les 2 valeurs V0x et V0y.

e - Dans Mécalab, la vitesse initiale $\overrightarrow{V(t_0)}$ peut être donnée par ses coordonnées V0x suivant $\vec{i}$ et V0y suivant $\vec{j}$ (coordonnées cartésiennes), où par sa composante radiale Vr0 et sa composante orthoradiale Val0 (coordonnées polaires), le point M étant repéré par rapport au centre de la fenêtre de coordonnées x_2 et y_2. L'angle Alpha est compté à partir de la verticale.



f - Connaissant les vitesses et positions aux instants antérieurs, on déduit la position à un instant ultérieur :

$x_1(t_{i+4}) = Vx(t_{i+3}) * 2 * \Delta t + x_1(t_{i+2})$
$y_1(t_{i+4}) = Vy(t_{i+3}) * 2 * \Delta t + y_1(t_{i+2})$

Il est donc nécessaire d'indiquer la position initiale du point $M(t_0)$: on peut donner les coordonnées cartésiennes de la position initiale dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$: x_0 et y_0. On peut, d'une autre façon, donner la distance initiale L du point M au centre de la fenêtre de coordonnées x_2 et y_2, ainsi que l'angle Alpha initial, défini plus haut par rapport à la verticale descendante (coordonnées polaires).

g - Si la force $\vec{F}$ dépend de la position on la recalcule à partir de la nouvelle position x_1, y_1 déterminée à l'étape précédente.

h - On réitère le processus. En pratique, les points $M(t_i)$ sont dessinés tous les 40 pas de calcul pour avoir une bonne précision numérique en conservant un tracé qui reste clair. Δt = 40 millisecondes pour le calcul de la trajectoire parabolique sous l'effet du poids, le calcul étant fait toutes les millisecondes et le tracé fait toutes les 40 millisecondes (1 milliseconde temps réel, le tracé étant volontairement ralenti par rapport au temps réel pour le poids et le ressort, et volontairement accéléré pour le mouvement de la Terre autour du Soleil).