# TP : Gammes à demi-tons égaux avec Microtonus

## Contexte

Microtonus (http://www.tuclic.fr/exec/microtonus.htm) permet de tester musicalement et de caractériser numériquement différentes gammes dans lesquelles les demi-tons sont égaux : par exemple, la gamme avec des octaves pures, ou celles avec des quintes ou des tierces majeures pures, avec des quarts ou  des 3/4 de tons, des gammes inversées, etc... Il permet également de caractériser les commas pythagoricien et syntonique.

En complément de Microtonus, RTF 06-UT est son équivalent pour les gammes à demi-tons inégaux (http://www.tuclic.fr/exec/temperaments_04_firefox.htm).

## Travail demandé

Ecouter la différence entre des intervalles purs (c'est à dire sans battement, dans des rapports de fréquences simples) d'octave, de quinte et de tierce majeure, ainsi que ces mêmes intervalles (impurs, avec des battements) dans d'autres gammes à demi-tons égaux.

Caractériser, en complétant les tableaux du document 5 en Annexe 1, les gammes suivantes en étudiant les intervalles de demi-ton, d'octave, de quinte et de tierce majeure pour chacune d'elles :

- gamme en octaves pures (gamme tempérée actuelle),
- gamme en quintes pures (gamme égale de caractère pythagoricien),
- gamme en tierces pures (gamme égale de caractère mésotonique),

Construire les gammes suivantes, trouver les valeurs mathématiquement exactes des "demi-tons" et les comparer aux valeurs obtenues avec Microtonus :

- gammes en 1/4 et en 3/4 de ton (gammes des maqâm),
- gamme constante (1 seule note pour tout le clavier),
- gamme tempérée inversée (qui descend lorsqu'on monte la gamme sur le clavier). Comment les accords habituels sont-ils transformés dans cette gamme ?

Les valeurs des intervalles seront caractérisées par :

- des rapports de fréquences (aspect physique),
- des valeurs en 100èmes de demi-ton (aspect pratique avec un accordeur électronique),
- des valeurs en commas pythagoricien et syntonique (aspect musical et historique)

Compléter dans ce but le document 6 : Annexe 2.

Quel peut être l'intérêt musical de gammes avec des 10èmes ou 17èmes pures ? Quel rôle jouent les nombres $\sqrt[16]{\frac{5}{2}}$ , $\sqrt[28]{5}$ ou $\sqrt[40]{10}$ pour ce type de gamme ? Les tester avec Microtonus.

# Document 1 : Utilisation pratique de Microtonus

Voir http://www.tuclic.fr/exec/doc_microtonus.pdf

# Document 2 : Relations entre demi-ton, tierce majeure, quinte et octave pour une gamme à demi-tons égaux

Les relations qui suivent ne sont valables que pour des gammes à demi-tons égaux. Elles sont valables pour des intervalles purs comme pour des intervalles élargis ou raccourcis, en fonction de la gamme à demi-tons égaux considérée. Elles permettent entre autres choses de montrer que si un des types d'intervalles (tierce majeure, quinte ou octave) est pur dans une gamme à demi-tons égaux, les autres types d'intervalles ne sont pas purs dans cette gamme.

Dans ce qui suit, $octave$ désigne le rapport de fréquences de deux notes séparées d'une octave, $quinte$ désigne le rapport de fréquences de deux notes séparées d'une quinte juste, $tierce$ désigne le rapport de fréquences de deux notes séparées d'une tierce majeure et $demi-ton$ désigne le rapport de fréquences de deux notes séparées d'un demi-ton.

Il y a 12 demi-tons dans une octave. Comme un intervalle est caractérisé un rapport de fréquences, on en déduit les relations :

$$octave=(demi-ton)^{12} \Leftrightarrow demi-ton=(octave)^{\frac{1}{12}}=\sqrt[12]{octave}$$

Il y a 7 demi-tons dans une quinte juste. On en déduit :

$$quinte=(demi-ton)^{7} \Leftrightarrow demi-ton=(quinte)^{\frac{1}{7}}=\sqrt[7]{quinte}$$

Il y a 4 demi-tons dans une tierce majeure. On en déduit :

$$tierce=(demi-ton)^{4} \Leftrightarrow demi-ton=(tierce)^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{tierce}$$

On déduit des relations précédentes les 3 suivantes :

$$octave=(tierce)^{3} \Leftrightarrow tierce=(octave)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{octave}$$

$$(quinte)^{12}=(octave)^7 \Leftrightarrow quinte=(octave)^{\frac{7}{12}}=\sqrt[12]{(octave)^7} \Leftrightarrow octave=(quinte)^{\frac{12}{7}}=\sqrt[7]{(quinte)^{12}}$$

$$(quinte)^4=(tierce)^7 \Leftrightarrow quinte=(tierce)^{\frac{7}{4}}=\sqrt[4]{(tierce)^7} \Leftrightarrow tierce=(quinte)^{\frac{4}{7}}=\sqrt[7]{(quinte)^4}$$

# Document 3 : Intervalles purs

Une octave pure correspond à un rapport de fréquence égal à 2.

Une quinte pure correspond à un rapport de fréquence égal à $\frac{3}{2}$ .

Une tierce majeure pure correspond à un rapport de fréquence $\frac{5}{4}$ .

Un demi-ton divise l'octave en 12 intervalles égaux. Il correspond donc à un rapport de fréquence égal à $\sqrt[12]{2}=2^{(\frac{1}{12})}$ lorsque l'octave est pure.

Le redoublement d'un intervalle consiste à ajouter une ou plusieurs octaves à cet intervalle. Par exemple, les redoublements de la tierce sont la 10ème, la 17ème, la 24ème, etc.

# Document 4 : Commas pythagoricien et syntonique

Les définitions ci-dessous ne dépendent pas du caractère égal ou non des demi-tons dans une gamme. Elles ont été introduites à l'origine pour les gammes à demi-tons inégaux (voir RTF 06-UT).

Une unité d'intervalle pratique, bien que sans fondement musical, est le centième de demi-ton de la gamme égale à octaves pures. Comme il y a 1200 centièmes de demi-tons dans une octave, il correspond au rapport de fréquences :

$$\sqrt[1200]{2}$$

Cette unité est utilisée en particulier par les accordeurs électroniques.

Le comma pythagoricien est l'intervalle très petit dont 12 quintes pures dépassent 7 octaves pures. Il correspond au rapport de fréquences :

$$\frac{(\frac{3}{2})^{12}}{2^7}$$

Le comma pythagoricien vaut 23,46... centièmes de demi-ton.

Le comma syntonique est l'intervalle très petit égal au tiers de l'intervalle dont une octave pure dépasse 3 tierces majeures pures. Il correspond au rapport de fréquences :

$$\frac{\sqrt[3]{2}}{\left(\frac{5}{4}\right)}$$

Le comma syntonique vaut 13,6862... centièmes de demi-tons.

Remarque : le comma syntonique est défini ici par rapport à la gamme à octaves pures. Il est parfois défini par rapport à la gamme à quintes pures.

# Document 5 : Annexe 1: tableaux caractéristiques des gammes

| Type de gamme | Gamme à demi-tons égaux et octaves pures | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nom de l'intervalle | Nombre de demi-tons | Valeur mathé-matique exacte | Valeur approchée | Notes choisies pour l'intervalle | Valeur du rapport de fréquences dans Microtonus | Valeur en 1/100èmes de demi-tons | Ecart en 1/100èmes de demi-ton au même intervalle dans la gamme à octaves pures |
| Octave | | | | | | | |
| Quinte | | | | | | | |
| Tierce majeure | | | | | | | |
| Demi-ton | | | | | | | |

| Type de gamme | Gamme à demi-tons égaux et quintes pures | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nom de l'intervalle | Nombre de demi-tons | Valeur mathé-matique exacte | Valeur approchée | Notes choisies pour l'intervalle | Valeur du rapport de fréquences dans Microtonus | Valeur en 1/100èmes de demi-tons | Ecart en 1/100èmes de demi-tons au même intervalle dans la gamme à octaves pures |
| Octave | | | | | | | |
| Quinte | | | | | | | |
| Tierce majeure | | | | | | | |
| Demi-ton | | | | | | | |

| Type de gamme | Gamme à demi-tons égaux et tierces majeures pures | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nom de l'intervalle | Nombre de demi-tons | Valeur mathé-matique exacte | Valeur approchée | Notes choisies pour l'intervalle | Valeur du rapport de fréquences dans Microtonus | Valeur en 1/100èmes de demi-tons | Ecart en 1/100èmes de demi-tons au même intervalle dans la gamme à octaves pures |
| Octave | | | | | | | |
| Quinte | | | | | | | |
| Tierce majeure | | | | | | | |
| Demi-ton | | | | | | | |

# Document 6 : Annexe 2 : Commas pour les gammes à demi-tons égaux

Compléter les cadres en utilisant Microtonus.

1 - Nombre de commas pythagoriciens entre 12 quintes pures (de la gamme à quintes pures) et 7 octaves pures (de la gamme à octaves pures) :

2 - Nombre de commas pythagoriciens entre 1 quinte pure (de la gamme à quintes pures) et 1 quinte de la gamme à octaves pures, et comparer à 1/12 :

3 - Nombre de commas syntoniques entre 1 octave pure (de la gamme à octaves pures) et 3 tierces pures (de la gamme à tierces pures) :

4 - Nombre de commas syntoniques entre 1 tierce non pure de la gamme à octaves pures et 1 tierce pure (de la gamme à tierces pures) :

5 - Nombre de commas syntoniques entre 1 quinte de la gamme à octaves pures et 1 quinte de la gamme à tierces pures, et comparer à 7/4 :