Mécanique : pendule pesant

1 - Pendule pesant

Le pendule pesant est constitué d'une masse m = 0,10154 kg suspendue à un fil de longueur L. Lorsqu'on écarte la masse de sa position d'équilibre, on observe un mouvement oscillant périodique. Quelle est la nature du mouvement du centre de gravité de la masse ?

Réponse :

Déterminer expérimentalement la période T et la fréquence f de ce mouvement. Comparer à la valeur théorique $T = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{L}{g}}$ où g est l'intensité de la pesanteur de valeur 9,81 m.s^{-2}. La période dépend-elle de la position initiale (donc de l'angle initial) ?

Réponse :

On regardera la vidéo : pendule_386_832_624.avi. C'est ce mouvement qui est étudié dans ce qui suit, dans le référentiel terrestre.

Chronométrer 10 périodes sur la vidéo. En déduire la longueur L du fil en mètre.

Réponse :

Le script Python de simulation du pendule pesant est mecalab_08_appli_002.py. Ouvrir ce script dans Edupython. Vérifier entre les lignes 1650 et 1680 les conditions initiales :

- angle initial alpha0 = 40,77592125 degrés
- longueur initiale du fil long0 = 0.615336 m
- vitesse angulaire initiale alphapoint0 = 0
- vitesse d'élongation du fil initiale longpoint0 = 0 (fil inextensible)

Lancer le script Python et observer le mouvement simulé : cliquer sur les boutons "Trajectoire", "Démarrer", "Arrêter". Quelle valeur de la période T Mécalab donne-t-il ? Est-ce en accord avec la formule ci-dessus et avec la vidéo expérimentale ? Tester l'effet de l'angle initial alpha0 sur la période. Conclusion ?

Réponse :

2 - Pointage de la trajectoire.

Effectuer le pointage avec Avimeca de la vidéo pendule_386_1664_1248_hd.avi identique à la précédente, mais en plus haute résolution. On pourra convertir le fichier de pointage créé par Aviméca avec le script avimeca_to_mecalab.py . Adapter le coefficient coefpixpoint=0.0002702703 (ligne 1986 de mecalab_08_appli_002.py) en le multipliant par 2 (passage d'une vidéo 4K à une vidéo HD, coefpixpoint est la longueur en mètre d'un pixel et dépend donc de la vidéo et de sa résolution).

Il est également possible d'utiliser les fichiers de pointage obtenus avec la vidéo 4K et micropix.exe, beaucoup plus précis (au 1/100ème de pixel près, avec 3328 pixels par 2496) : resu_point_mecalab_x_001_041.txt et resu_point_mecalab_y_001_041.txt (utilisés par défaut à l'ouverture de mecalab_08_appli_002.py).

Faire apparaître le résultat du pointage avec le bouton "Pointage" de Mécalab.

Comparer la trajectoire expérimentale et la trajectoire simulée. En quel point la vitesse est-elle maximale ? Comparer en ce point la vitesse expérimentale (Cliquer dans le menu en bas sur "Expérience 1" pour faire les constructions vectorielles) et la vitesse simulée (faire de même en cliquant sur "Simulation 1"). Comparer les durées pour une demi-période (expérience et simulation).

<u>Réponses :</u>

Il est possible d'utiliser indifféremment la trajectoire simulée sur une demi-période ou la trajectoire expérimentale pour ce qui suit.

3 - Tension du fil

Le système mécanique étudié est la masse m = 0,10154 kg. On se place dans le référentiel terrestre.

Faire un schéma en indiquant les 2 forces qui s'exercent sur cette masse.

La tension $\overrightarrow{T}$ (inconnue a priori) va être déduite de la relation entre les forces qui s'exercent sur la masse et l'accélération $\overrightarrow{a}$ de cette masse (2ème loi de Newton) :

$\overrightarrow{T} + \overrightarrow{P} = m \cdot \overrightarrow{a}$ soit $\dfrac{\overrightarrow{T}}{m} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{g}$.

L'intensité $\overrightarrow{g}$ de la pesanteur est verticale et de valeur connue 9,81 m.s^{-2}. Le poids de la masse est :

$$\overrightarrow{P} = m \cdot \overrightarrow{g}$$

L'accélération $\overrightarrow{a}$ du centre de gravité de la masse va être déterminée par une construction vectorielle avec Mécalab.

A titre d'exemple, les constructions seront faites au point A_{i+2} qui correspond à l'instant t = 0.18 s sur la trajectoire.

Le pas de temps pour le pointage de la trajectoire est $\Delta t = 0.02 s$ entre 2 croix rouges.

A - Construire le vecteur déplacement entre A_i et A_{i+2}. En déduire le vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{i+1}}$.

Construire de même le vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{i+3}}$ à partir du vecteur déplacement entre les points A_{i+2} et A_{i+4}.

En déduire par soustraction vectorielle la variation du vecteur vitesse $\overrightarrow{\Delta V_{i+2}} = \overrightarrow{V_{i+3}} - \overrightarrow{V_{i+1}}$. En déduire le vecteur accélération $\overrightarrow{a} = \dfrac{1}{2 \cdot \Delta t} \cdot \overrightarrow{\Delta V_{i+2}}$ au point A_{i+2} : sélection de $\overrightarrow{\Delta V_{i+2}}$ par Clic-Gauche et bouton "Vitesse --> Accélération" .

B - Construire le vecteur -$\overrightarrow{g}$ à l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{a}$ de la façon suivante :

Vérifier que le bouton radio "Tous" est coché. Contrôle-Clic-Droit sur l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{a}$. Une croix verte apparaît.

Cocher le bouton radio "Accélération". Contrôle-Majuscule-Clic-Gauche fait ouvrir une boîte de dialogue. Cliquer sur cette boîte pour la rendre active et entrer successivement "0" pour l'accélération suivant x et "-9.81" pour l'accélération suivant y.

Sommer $\overrightarrow{a}$ et -$\overrightarrow{g}$ par Clic-Gauche sur $\overrightarrow{a}$ et Maj-Clic-Gauche sur -$\overrightarrow{g}$. On obtient ainsi le vecteur $\dfrac{\overrightarrow{T}}{m}$. Tracer le vecteur déplacement entre A_{i+2} et le point d'attache O du fil (la croix noire). Il peut être nécessaire de créer un nouveau point O du type de la trajectoire utilisée : simulation ou expérience. Noter les coordonnées du point O : x2 et y2 lignes 1639 à 1642 de Mécalab. A priori : x2 = 0.571428571 m et y2 = 0.331734 m (comptés depuis l'angle en haut à gauche de la fenêtre).

Vérifier que le bouton radio "Tous" est coché. Clic-Gauche sur un point de la trajectoire. Contrôle-Majuscule-Clic-Gauche fait apparaître une boîte de dialogue. La rendre active en cliquant dessus et entrer les valeurs de x2 et y2 ci-dessus.

On voit de cette façon que la tension $\overrightarrow{T}$ du fil est dirigée suivant le fil, de la masse suspendue vers le point O d'attache du fil.

La construction permet de lire la valeur de $\frac{\overrightarrow{T}}{m}$ en $m.s^{-2}$ en sélectionnant ce vecteur dans Mécalab. La connaissance de la masse m = 0,10154 kg permet de trouver la valeur de $\overrightarrow{T}$ en newton.

Réponses :

C'est un fait général que la tension d'un fil ou que la réaction d'un support est le résultat des autres actions mécaniques modélisées par des forces : la tension ou la réaction "s'adaptent" à la situation et leurs caractéristiques ne sont pas connues initialement.

3 - Accélération tangentielle

On peut vérifier avec Mécalab une propriété de la composante tangentielle de l'accélération a_T :

$$\frac{\Delta\|\overrightarrow{V}\|}{2 \cdot \Delta t} = a_T$$

où $\Delta\|\overrightarrow{V}\| = \|\overrightarrow{V_{i+3}}\| - \|\overrightarrow{V_{i+1}}\|$ est la variation de la norme de la vitesse entre les instants t_{i+1} et t_{i+3} .

$2 \cdot \Delta t$ est la durée entre ces deux instants (0,04 s ici).

a_T est la valeur de la composante tangentielle de l'accélération. Pour l'obtenir, on projette le vecteur accélération $\overrightarrow{a}$ sur un vecteur tangent au point A_{i+2} à la trajectoire. Le vecteur $\overrightarrow{V_{i+2}}$ est un tel vecteur. Le construire à partir du vecteur déplacement entre A_{i+1} et et A_{i+3}. On reportera ce vecteur vitesse (qui a A_{i+1} comme origine) en A_{i+2} en le recopiant au bout du vecteur déplacement entre A_i et A_{i+2} (Clic-Gauche sur $\overrightarrow{V_{i+2}}$ et Maj-Clic-Gauche sur le point A_{i+2} à l'extrémité de $\overrightarrow{A_{i+1}A_{i+2}}$).

Pour projeter $\overrightarrow{a}$ sur $\overrightarrow{V_{i+2}}$: Clic-Gauche sur $\overrightarrow{V_{i+2}}$ reporté et Contrôle-Majuscule-Clic-Gauche sur $\overrightarrow{a}$. On peut alors vérifier l'égalité annoncée en sélectionnant le vecteur projeté $\overrightarrow{a_T}$. Noter les 2 valeurs a_T et $\frac{\Delta\|\overrightarrow{V}\|}{2 \cdot \Delta t}$. Quel est leur écart relatif ?

Réponses :

4 - Accélération normale

On peut vérifier avec Mécalab une propriété de l'accélération normale a_N . Il s'agit de la composante de l'accélération $\overrightarrow{a}$ dirigée perpendiculairement à la tangente à la trajectoire, donc dirigée vers le centre de courbure de la trajectoire, ici le point d'attache du fil (croix noire).
La relation attendue est :

$$\frac{\|V_{i+2}\|^2}{R} = a_N$$

où R est le rayon de courbure de la trajectoire, ici la longueur R = L = 0.615336 m du fil (sélectionner le vecteur $\overrightarrow{A_{i+2}O}$ pour avoir sa longueur). a_N est l'accélération normale au point A_{i+2} (accélération centripète dirigée vers le centre de la trajectoire circulaire, opposée en direction à la notion intuitive d'accélération et de force centrifuge dans un mouvement circulaire).

Projeter l'accélération $\overrightarrow{a}$ sur la direction $\overrightarrow{A_{i+2}O}$, perpendiculaire à la tangente à la trajectoire : Clic-Gauche sur $\overrightarrow{A_{i+2}O}$ et Contrôle-Majuscule-Clic-Gauche sur $\overrightarrow{a}$ (on se reportera au § 3-B pour créer le vecteur $\overrightarrow{A_{i+2}O}$). Construire le vecteur $\overrightarrow{V_{i+2}}$ à partir du déplacement entre A_{i+1} et A_{i+3} .

On peut alors vérifier numériquement la relation attendue pour a_N .

5 - Accélération tangentielle et poids

On peut projeter la relation vectorielle de la 2ème loi de Newton dans la direction tangentielle à la trajectoire (sur $\overrightarrow{V_{i+2}}$). La construction nécessite de projeter la pesanteur $\overrightarrow{g}$ (ou son opposé -$\overrightarrow{g}$ pour plus de clarté de la figure) sur $\overrightarrow{V_{i+2}}$ pour obtenir $\overrightarrow{g_T}$. On peut alors vérifier :

$a_T = g_T$ **Valeurs :**

entre les composantes tangentielles. Que vaut a_T au point le plus bas de la trajectoire ?

Réponse :

6 - Accélération normale, tension du fil et poids

On peut de la même façon projeter la relation vectorielle de la 2ème loi de Newton dans la direction normale à la trajectoire. On projette $\overrightarrow{g}$ sur $\overrightarrow{A_{i+2}O}$ pour obtenir $\overrightarrow{g_N}$ et on vérifie en valeurs absolues :

$\frac{T}{m} - g_N = a_N$ ou $\frac{T}{m} = g_N + a_N$ **Valeurs :**

avec $\frac{T}{m} > g_N$. La tension T du fil compense la composante normale du poids $P_N = m \cdot g_N$ et la "force centrifuge" $m \cdot a_N$, en employant une notion intuitive.

Est-ce que T s'annule au point le plus haut de la trajectoire ? Sinon, prévoir sa valeur. Prévoir le résultat pour T au point le plus haut si l'angle initial vaut 90 degrés.

Réponses :

7 - Energie cinétique, énergie potentielle de pesanteur et énergie mécanique

L'énergie cinétique en joule (J) d'un point matériel à un instant donné est liée à la vitesse :

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V^2$$

et l'énergie potentielle de pesanteur est liée à l'altitude h du point matériel à un instant donné :

$$E_p = m \cdot g \cdot h$$

L'énergie mécanique est :

$$E_m = E_c + E_p$$

La tension du fil $\overrightarrow{T}$ étant à chaque instant perpendiculaire à la vitesse $\overrightarrow{V}$ du point matériel, elle ne joue pas de rôle énergétique (notion de "travail d'une force").

On peut vérifier en plusieurs points, avec une très bonne précision relative (de l'ordre de 0,1% avec le pas de temps utilisé $\Delta t = 0.2s$), que l'énergie mécanique E_m est constante sur une période, aussi bien avec la trajectoire expérimentale qu'avec la trajectoire simulée :

Point A_i				
y				
h = 1 - y				
m				
g				
V				
$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V^2$				
$E_p = m \cdot g \cdot h$				
$E_m = E_c + E_p$				

Note 1 : la valeur 1 dans "h = 1 - y" est arbitraire et sans conséquence sur la conclusion.
Note 2 : l'énergie mécanique E_m est constante si les frottements de l'air ont un effet négligeable.