

Mécanique : projectile soumis à son poids

1 - Vidéo

Regarder la vidéo : [bille_ralenti_640_360.avi](#). C'est ce mouvement qui est étudié dans ce qui suit, dans le référentiel terrestre.

2 - Mécalab : simulation et analyse d'une trajectoire pointée

Lancer le logiciel Edupython. Ouvrir "[mecalab_08_appli_001.py](#)" dans Edupython et le lancer (flèche verte en haut). La fenêtre Mécalab apparaît.

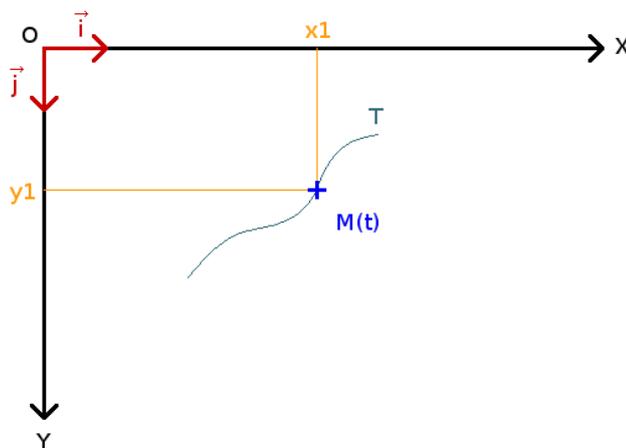
Inscrire son identifiant définitif dans la case en haut à droite (**Nom, Prénom, Classe**).

Lancer le calcul de simulation avec les paramètres par défaut dans [mecalab_08_appli_001.py](#) : cliquer sur les boutons "**Trajectoire**", "**Démarrer**", "**Arrêter**".

A - Position

Choisir un point A_i sur la trajectoire calculée : **Clic-Gauche** dessus, noter ses coordonnées x_i, y_i ainsi que l'instant t_i correspondant, indiqués dans la partie droite de la fenêtre. Faire de même pour le 2^{ème} point qui suit : A_{i+2} , après avoir sauté le point A_{i+1} . Noter ces valeurs dans le tableau :

	instant t	abscisse x	ordonnée y
$i =$	$t_i =$	$x_i =$	$y_i =$
$i + 2 =$	$t_{i+2} =$	$x_{i+2} =$	$y_{i+2} =$



B - Déplacement

Clic-Gauche sur A_i , **Maj-Clic-Gauche** sur A_{i+2} . On obtient le vecteur déplacement, de couleur magenta : sélectionner ce vecteur par **Clic-Gauche** et cliquer sur le bouton "**Enregistrer mcb**" (ceci permet d'enregistrer au fur et à mesure les constructions en gardant les fichiers précédents).

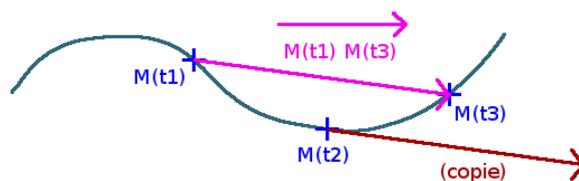
Le déplacement \vec{d} est un vecteur à 2 composantes dx et dy suivant \vec{i} et \vec{j} :

$$\vec{d} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} \quad \text{avec les composantes :}$$

$dx_{i,i+2} = x_{i+2} - x_i$ et $dy_{i,i+2} = y_{i+2} - y_i$, calculées à partir des valeurs obtenues précédemment pour les positions.

Le vecteur déplacement \vec{d} a pour norme (ou valeur) : $d = \|\vec{d}\| = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Cette valeur ainsi que les 2 composantes dx et dy suivant \vec{i} et \vec{j} sont indiquées dans la partie droite de la fenêtre. Compléter le tableau avec les valeurs calculées "à la main" avec une calculatrice, puis celles indiquées par Mécalab :

	entre les instants t_i et t_{i+2}	Déplacement horizontal dx	Déplacement vertical dy	Norme ou valeur du déplacement d
Valeurs calculées avec la calculatrice	$t_i =$ $t_{i+2} =$	$dx_{i,i+2}$ $= (\quad - \quad)$ $=$	$dy_{i,i+2}$ $= (\quad - \quad)$ $=$	$d_{i,i+2} =$
Valeurs calculées par Mécalab	$t_i =$ $t_{i+2} =$	$dx_{i,i+2} =$	$dy_{i,i+2} =$	$d_{i,i+2} =$



C - Vitesse

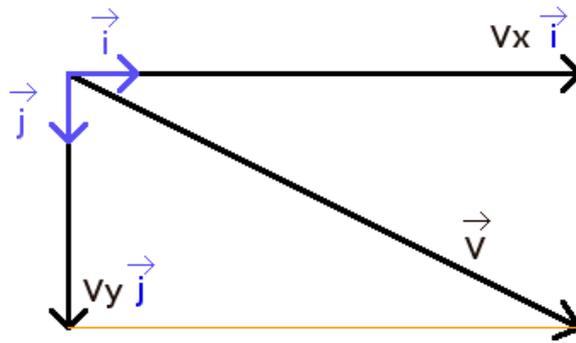
La vitesse est un vecteur \vec{V} qui a deux composantes V_x et V_y suivant \vec{i} et \vec{j} :

$$\vec{V} = V_x \cdot \vec{i} + V_y \cdot \vec{j} \quad \text{avec :}$$

$$V_{x_{i+1}} = \frac{dx_{i,i+2}}{t_{i+2} - t_i} = \frac{dx_{i,i+2}}{2 \cdot \Delta t} \quad \text{et} \quad V_{y_{i+1}} = \frac{dy_{i,i+2}}{t_{i+2} - t_i} = \frac{dy_{i,i+2}}{2 \cdot \Delta t}$$

où les composantes du déplacement correspondent aux points A_i et A_{i+2} , et Δt est la durée qui s'écoule entre 2 instants de pointage successifs :

$\Delta t = t_{i+2} - t_{i+1} = t_{i+1} - t_i$ soit $t_{i+2} - t_i = 2 \cdot \Delta t$, avec $\Delta t = 0,02s$ ici (50 points pointés par seconde, repérés sur la trajectoire par des croix).



Le vecteur vitesse \vec{V} a pour norme (ou valeur) : $V = \|\vec{V}\| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$.

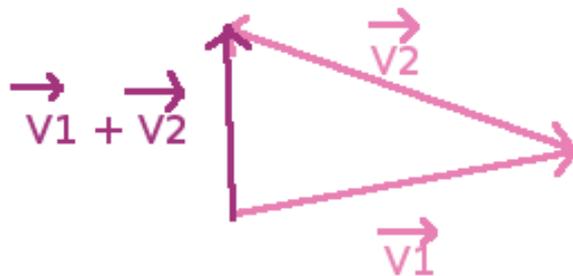
Pour obtenir la vitesse moyenne entre les 2 points A_i et A_{i+2} avec Mécalab, sélectionner le vecteur déplacement \vec{d} par **Clic-Gauche** et cliquer sur le bouton "**Déplacement --> Vitesse**". La division par $2 \cdot \Delta t$ est alors effectuée et le vecteur vitesse est tracé couleur saumon, colinéaire au vecteur \vec{d} initial. Sélectionner le vecteur vitesse par **Clic-Gauche**. Ses caractéristiques apparaissent à droite. Cliquer sur le bouton "**Enregistrer mcb**" pour enregistrer cette nouvelle construction.

	Entre les instants t_i et t_{i+2}	Vitesse horizontale V_x	Vitesse verticale V_y	Norme ou valeur de la vitesse V
Valeurs calculées avec la calculatrice	$t_i =$ $t_{i+2} =$	$V_{x_{i+1}}$ $= (\quad / \quad)$ $=$	$V_{y_{i+1}}$ $= (\quad / \quad)$ $=$	$V_{i+1} =$
Valeurs calculées par Mécalab	$t_i =$ $t_{i+2} =$	$V_{x_{i+1}} =$	$V_{y_{i+1}} =$	$V_{i+1} =$

Remarque : pour trouver une valeur précise de la vitesse "instantanée" au point A_{i+1} , on utilise le déplacement entre le point qui précède A_i et le point qui suit A_{i+2} , donc la durée de ce déplacement est 2 pas de temps Δt , d'où la valeur **2** dans la fenêtre Mécalab pour "**Nb pas vitesse**".

D - Variation du vecteur vitesse

Les forces qui agissent sur le point matériel en mouvement modifient entre deux instants le vecteur vitesse, en valeur et/ou en direction. D'où l'intérêt d'obtenir par une construction vectorielle le "vecteur différence" entre le vecteur vitesse \vec{V}_{i+3} à l'instant t_{i+3} et le vecteur vitesse \vec{V}_{i+1} à l'instant t_{i+1} . On notera $\overrightarrow{\Delta V_{i+2}}$ ce vecteur différence entre \vec{V}_{i+3} et \vec{V}_{i+1} . La différence $\overrightarrow{\Delta V_{i+2}} = \vec{V}_{i+3} - \vec{V}_{i+1}$ est obtenue comme la somme vectorielle $\overrightarrow{\Delta V_{i+2}} = \vec{V}_{i+3} + (-\vec{V}_{i+1})$ de \vec{V}_{i+3} et de $-(\vec{V}_{i+1})$, opposé du vecteur \vec{V}_{i+1} . La figure ci-dessous rappelle comment la somme de deux vecteurs est obtenue :



Du point de vue des composantes de ces vecteurs, la composante x suivant \vec{i} de la somme des vecteurs est la somme des composantes x suivant \vec{i} de chaque vecteur :

$(\vec{V}_1 + \vec{V}_2)_x = (\vec{V}_1)_x + (\vec{V}_2)_x$. Il en est de même pour la composante y des vecteurs suivant \vec{j} :

$(\vec{V}_1 + \vec{V}_2)_y = (\vec{V}_1)_y + (\vec{V}_2)_y$.

Construire le vecteur vitesse \vec{V}_{i+3} à partir du vecteur déplacement entre les points A_{i+2} et A_{i+4} , comme cela a été fait au paragraphe "C - Vitesse" pour \vec{V}_{i+1} .

Pour obtenir l'opposé du vecteur \vec{V}_{i+1} avec Mécalab, sélectionner le vecteur \vec{V}_{i+1} par **Clic-Gauche**, puis **Clic-Droit**. Effacer le vecteur \vec{V}_{i+1} par **Maj-Clic-Droit**.

Pour obtenir la somme des deux vecteurs $\overrightarrow{\Delta V_{i+2}} = \vec{V}_{i+3} + (-\vec{V}_{i+1})$, on **reporte** d'abord $-(\vec{V}_{i+1})$ à l'extrémité de \vec{V}_{i+3} : **Clic-Gauche** sur $-(\vec{V}_{i+1})$ puis **Maj-Clic-Gauche** sur l'extrémité de \vec{V}_{i+3} . Le vecteur $-(\vec{V}_{i+1})$ est alors copié et reporté au bout de \vec{V}_{i+3} .

La somme est alors obtenue par **Clic-Gauche** sur \vec{V}_{i+3} puis **Maj-Clic-Gauche** sur $-(\vec{V}_{i+1})$ **reporté**. On obtient $\overrightarrow{\Delta V_{i+2}} = \vec{V}_{i+3} - \vec{V}_{i+1}$. Sélectionner ce vecteur par **Clic-Gauche** pour obtenir ses caractéristiques dans la partie droite de la fenêtre. Cliquer sur le bouton "Enregistrer mcb" pour enregistrer cette nouvelle construction.

Compléter le tableau suivant après avoir effectué les constructions précédentes :

\vec{V}_{i+3}	Entre les instants t_{i+2} et t_{i+4}	Vitesse horizontale V_x	Vitesse verticale V_y	Norme ou valeur de la vitesse V
Valeurs calculées par Mécalab	$t_{i+2} =$ $t_{i+4} =$	$V_{x_{i+3}} =$	$V_{y_{i+3}} =$	$V_{i+3} =$

	Composante V_x	Composante V_y	Norme V
\vec{V}_{i+3}			
\vec{V}_{i+1}			
$-(\vec{V}_{i+1})$			
$\vec{\Delta V}_{i+2} = \vec{V}_{i+3} - \vec{V}_{i+1}$ avec la calculatrice			
$\vec{\Delta V}_{i+2} = \vec{V}_{i+3} - \vec{V}_{i+1}$ par Mécalab			

Attention : $\|\vec{V}_{i+3}\| + \|-(\vec{V}_{i+1})\| \neq \|\vec{\Delta V}_{i+2}\|$ en général (la norme de la somme ou de la différence **n'est pas égale** à la somme des normes ou à leur différence).

E - Relation entre la force et la variation du vecteur vitesse en un point donné

La force appliquée en un point et utilisée par Mécalab pour le calcul du mouvement du point matériel de masse m peut être visualisée par **Clic-Gauche** pour sélectionner le point puis **Ctrl-Clic-Gauche**. Sélectionner le vecteur force qui apparaît en brun \vec{F}_{i+2} par **Clic-Gauche** pour voir ses caractéristiques dans la partie droite de la fenêtre. Cliquer sur le bouton "Enregistrer mcb" pour enregistrer cette nouvelle construction.

Les tableaux ci-dessous permettent de vérifier dans ce cas particulier des égalités vectorielles très générales :

$$\vec{F}_{i+2} = m \cdot \frac{1}{2 \cdot \Delta t} \cdot \vec{\Delta V}_{i+2} \quad (2^{\text{ème}} \text{ loi de Newton})$$

qui ne fait intervenir que des grandeurs au point A_{i+2} , donc vraies en tout point et à tout instant. L'égalité en vecteur entraîne l'égalité des composantes x et y de ces vecteurs, ainsi que de leur norme. En particulier, les deux vecteurs \vec{F}_{i+2} et $\vec{\Delta V}_{i+2}$ sont colinéaires (même direction). De plus, la masse ($m = 0,2kg$ ici) du point matériel et le pas de temps $\Delta t = 0,02s$ étant des nombres positifs, ces deux vecteurs ont le même sens. Le coefficient 2 vient du fait que la variation de vitesse $\vec{\Delta V}_{i+2}$ a été calculée à partir de \vec{V}_{i+3} et de \vec{V}_{i+1} , séparés de 2 pas de temps Δt , d'où la valeur 2 dans la fenêtre Mécalab pour "Nb pas accélération", et qui apparaît également dans la relation ci-dessus.

Par ailleurs, la force $\overrightarrow{F_{i+2}}$ est ici le poids \overrightarrow{P} du projectile, qui s'exprime en fonction de la masse m du projectile est de l'intensité de la pesanteur $\overrightarrow{g} = 9,81 \overrightarrow{j}$ mesurée en $m.s^{-2}$: $\overrightarrow{P} = m \cdot \overrightarrow{g}$.

On en déduit, dans le cas du projectile soumis à son poids, l'égalité attendue qu'on souhaite vérifier numériquement dans tableau ci-dessous :

$$\frac{1}{2 \cdot \Delta t} \cdot \overrightarrow{\Delta V_{i+2}} = \overrightarrow{g}$$

La grandeur $\overrightarrow{a} = \frac{\overrightarrow{\Delta V}}{2 \cdot \Delta t}$ est appelée l'accélération au point considéré et traduit le fait que la vitesse \overrightarrow{V} varie, en valeur et/ou en direction. Ceci correspond bien au sens courant de ce mot. On rappelle que le coefficient 2 vient de l'écart de 2 pas de temps Δt entre les points A_{i+1} et A_{i+3} auxquels les vitesses ont été déterminées.

Il est maintenant possible de compléter le tableau :

	Composante x	Composante y	Norme
masse $m = 0,2 \text{ kg}$			
$\Delta t = 0,02s$			
$\overrightarrow{\Delta V_{i+2}}$			
$m \cdot \frac{1}{2 \cdot \Delta t} \cdot \overrightarrow{\Delta V_{i+2}}$ calculé avec la calculatrice			
$\overrightarrow{F_{i+2}}$ indiqué par Mécalab			
$\overrightarrow{a} = \frac{1}{2 \cdot \Delta t} \cdot \overrightarrow{\Delta V_{i+2}}$ calculé avec la calculatrice			
$\overrightarrow{g} = 9,81 \cdot \overrightarrow{j}$			

3 - Analyse d'une trajectoire pointée expérimentale avec Mécalab

Cliquer sur le bouton "**Pointage**" en bas à droite de la fenêtre Mécalab. Ceci affiche la trajectoire expérimentale de la vidéo, pointée préalablement vue par vue avec l'utilitaire "Micropix", qui produit les fichiers "resu_point_mecalab_x_1.txt" et "resu_point_mecalab_y_1.txt". On peut obtenir une trajectoire pointée similaire avec "Avimeca" ou un autre logiciel de pointage. Les 2 fichiers "resu_point_mecalab_x_1.txt" et "resu_point_mecalab_y_1.txt" doivent contenir respectivement les abscisses et les ordonnées des positions du point matériel en mouvement en pixels, séparées par des points-virgule (;). Micropix donne des valeurs décimales de pixels (fraction de pixel).

Cliquer sur "**Expérience 1**" dans la fenêtre Mécalab pour rendre accessibles les points de la trajectoire expérimentale verte.

Choisir un point A_i sur cette trajectoire expérimentale et procéder comme pour la courbe simulée pour obtenir la variation du vecteur vitesse $\overrightarrow{\Delta V_{i+2}}$ et l'accélération $\vec{a} = \frac{1}{2 \cdot \Delta t} \cdot \overrightarrow{\Delta V_{i+2}}$ au point A_{i+2} .

Cliquer sur le bouton "Enregistrer mcb" pour enregistrer ces nouvelles constructions.

Compléter le tableau ci-dessous avec les valeurs expérimentales, indiquées par Mécalab :

i =	Composante x	Composante y	Norme
$\Delta t = 0,02s$			
$\overrightarrow{V_{i+1}}$			
$\overrightarrow{V_{i+3}}$			
$\overrightarrow{\Delta V_{i+2}}$			
$\vec{a} = \frac{1}{2 \cdot \Delta t} \cdot \overrightarrow{\Delta V_{i+2}}$			
$\vec{g} = 9,81 \cdot \vec{j}$			

On notera les écarts entre les valeurs des 2 dernières lignes malgré les précautions expérimentales d'acquisition de la vidéo, du pointage à une fraction de pixel près avec "Micropix" et la précision "mathématique" du traitement avec Mécalab. Une analyse théorique des écarts montre que la variation du vecteur vitesse est une grandeur qu'il est très difficile d'obtenir expérimentalement, malgré une très bonne précision sur la position des points.

4 - Ajustement de la trajectoire simulée sur la trajectoire expérimentale avec Mécalab

L'objectif est de modifier, dans les paramètres de la simulation, la position initiale $xx_0=0.1$ et $yy_0=0.7$, la vitesse initiale $V_0x=0.7$ et $V_0y=-3.0$, la valeur de l'intensité de la pesanteur $g=9,81$ et les deux coefficients d'ajustement fin de la vitesse $coefvitsim=1,0$ et $coefvitdir=1,0$, pour que la trajectoire simulée bleue soit aussi proche que possible de la trajectoire expérimentale verte. $coefvitsim$ modifie dans les mêmes proportions V_0x et V_0y et modifie donc la valeur de la vitesse initiale, et $coefvitdir$ les modifie en proportions inverses. Il modifie donc la direction de la vitesse initiale. Tous les paramètres sont donnés dans le Système International d'unités (unités SI).

Ces paramètres peuvent être modifiés entre les lignes 1598 et 1620 du script Python [mecalab_08_appli_001.py](#) dans Edupython. Lorsque 3 valeurs sont données entre crochets, séparées par des virgules ($[2.3,5.2,0.1]$ par exemple) seule la première valeur est ici prise en compte car une seule trajectoire est simulée ici. Attention au séparateur décimal : le point (,).

Etablir une stratégie pour obtenir les 2 trajectoires presque parfaitement superposées et lancer plusieurs simulations en modifiant les paramètres indiqués dans cet objectif. On s'appuiera sur les valeurs données par Mécalab pour la trajectoire expérimentale (position, vitesse, accélération, ...).

Cliquer sur le bouton "Enregistrer mcb" pour enregistrer ces simulations lorsque l'accord est satisfaisant.